Les pavages de Truchet: découverte

et exemples d'utilisation

en classe (cycle 2 et cycle 3)

Antenne de Moulins

SOMMAIRE

I. TRUCHET, UN SAVANT DU GRAND SIECLE.

Les pavages qui sont présentés dans ce document sont appelés « pavages de TRUCHET », du nom du Père Sébastien TRUCHET, un religieux membre de l'Académie des sciences qui a vécu tout le siècle de LOUIS XIV (né à Lyon en 1657 et mort en 1729) et qui fut l'un des premiers à étudier la théorie des pavages[1], après les recherches pionnières du grand astronome KEPLER au début du XVIIe siècle et ceci parmi une multitude d'intérêts et de travaux dans des domaines fort divers. Il fut notamment à son époque l'un des grands spécialistes des canaux fluviaux, mais aussi le véritable inventeur du point typographique et d'innombrables machines (canons, machines à transplanter les arbres, cadrans solaires, etc.)

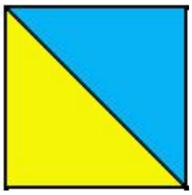
Cette théorie des pavages n'allait connaître son véritable développement qu'à partir de la seconde moitié du XIXe siècle, notamment en rapport avec les progrès des recherches en cristallographie.
Mais TRUCHET fut le premier à tenter l'analyse exhaustive d'un pavage non trivial, à travers la mise en oeuvre d'une méthode combinatoire. Nous en verrons des exemples dans les pages suivantes.

La dénomination « pavage de Truchet » a été élargie à des situations dont Truchet n'a pas été l'auteur et qui ont fait l'objet de travaux au cours du XXème siècle. Mais ils ont tous un point commun : ils sont tous construits sur une pièce à base carrée.

[1] Il a fait connaître ses recherches dans un mémoire inséré dans l'Historie de l'Académie Royale des Sciences de Paris, année 1704, sous le titre : *Méthode pour faire une infinité de desseins différens avec des carreaux mi-partis de deux couleurs par une ligne diagonale* par Jean Truchet, (en religion le P. Sébastien, de l'ordre des Carmes).

II. Les pavages de Truchet simples.

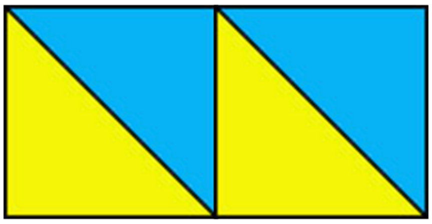
Nous allons d'abord parler des **pavages de Truchet simples**, c'est-à-dire de ceux dont il a élaboré la théorie.
La pièce de base est la suivante :



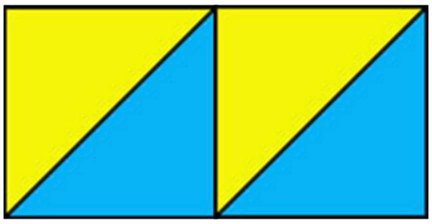
C'est donc une pièce carrée et bicolore dont les deux parties coloriées sont séparées par une diagonale.

Dans un premier temps, Truchet combine les pièces pour envisager toutes les situations possibles. Si on néglige l'orientation de l'ensemble obtenu (couple de deux carrés), il obtient 10 dispositions différentes :

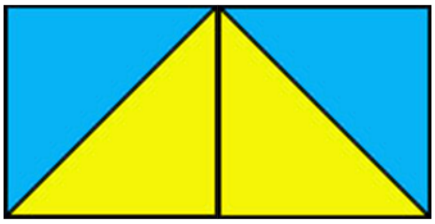
1.



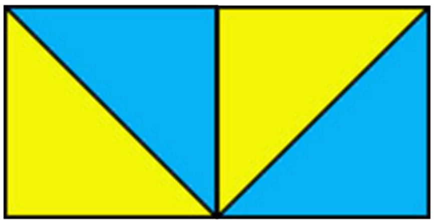
2.



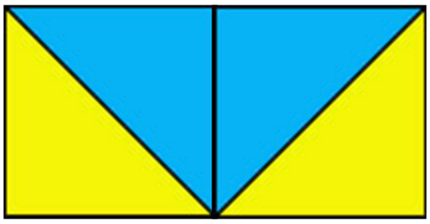
3.



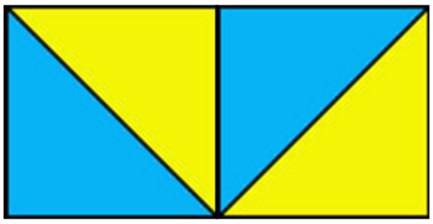
4.



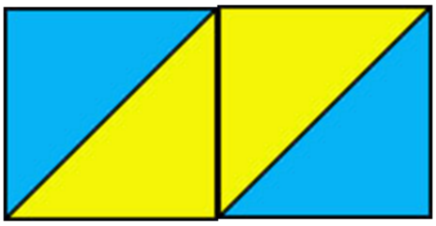
5.



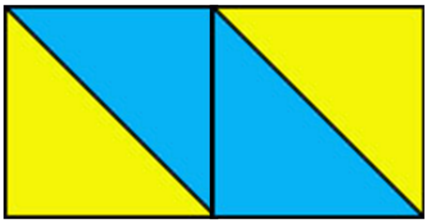
6.

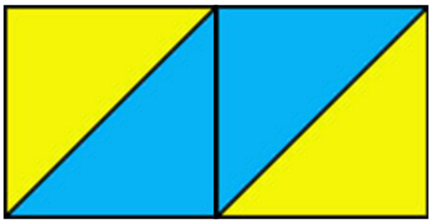


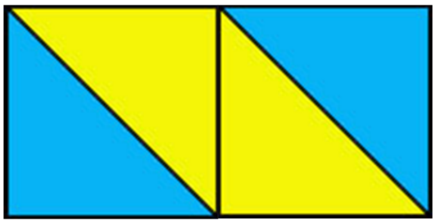
7.



8.

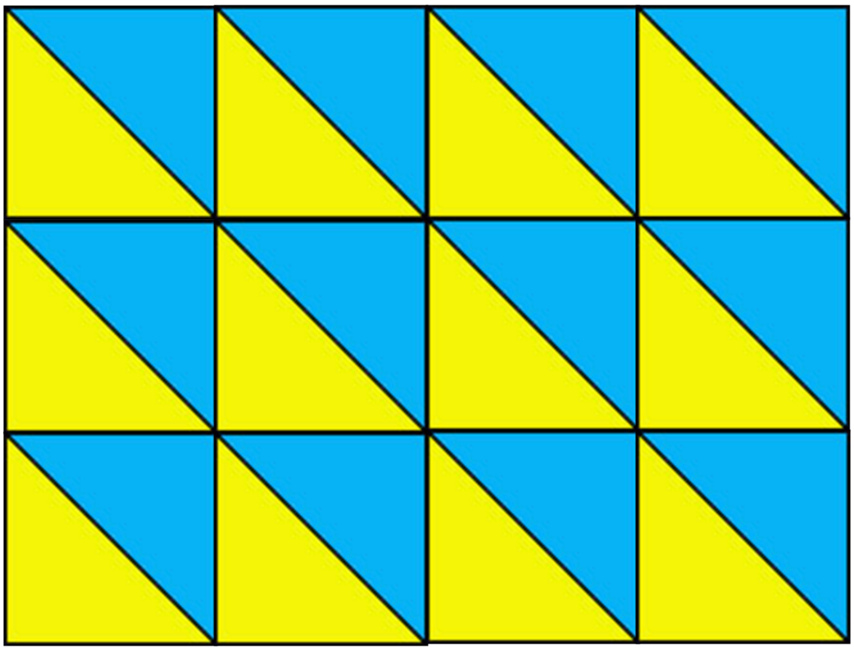


9. 

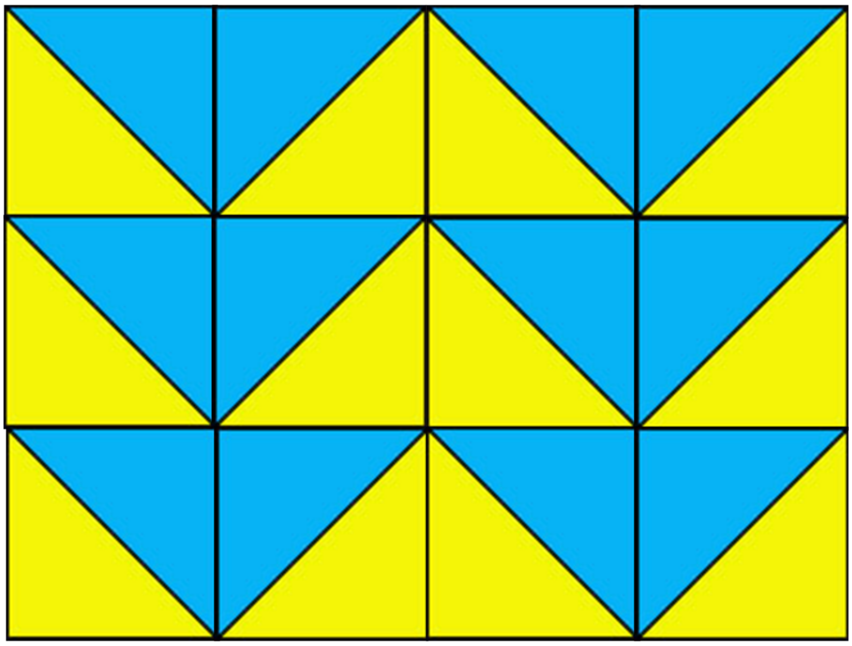
10. 

On peut utiliser ces couples pour former des pavages, par translation. Par exemple :

Avec le modèle n°1 :

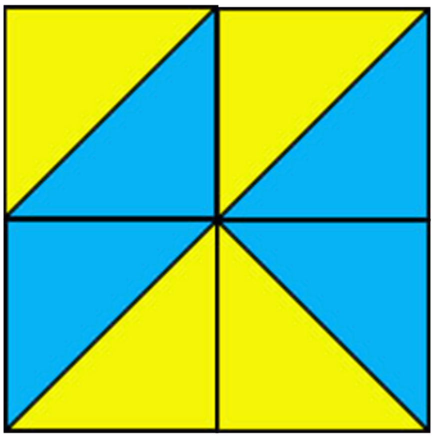


Avec le modèle n°5 :

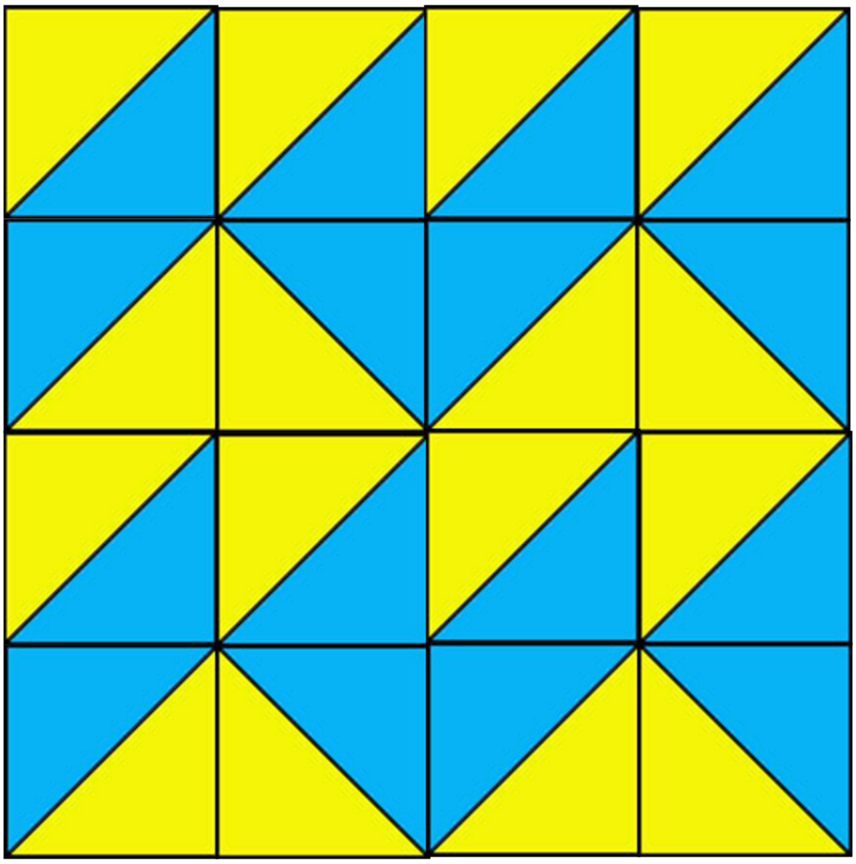


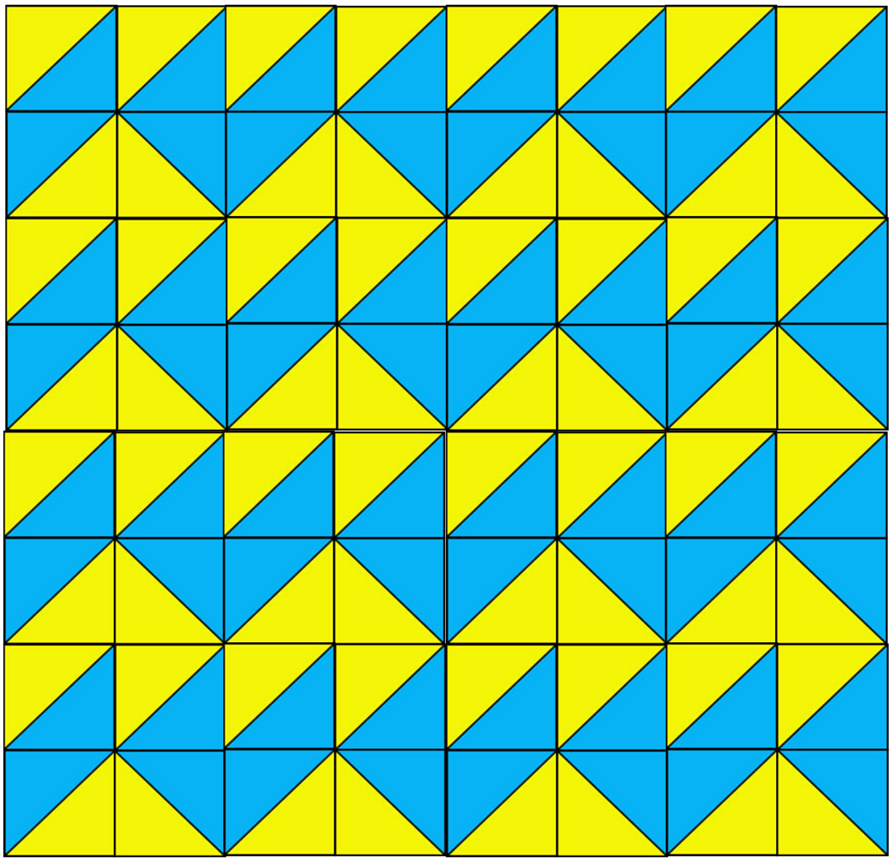
On peut aussi, avec deux couples de carrés, former un carré de 4 cases.

Par exemple, avec les modèles n°2 et n°3 :

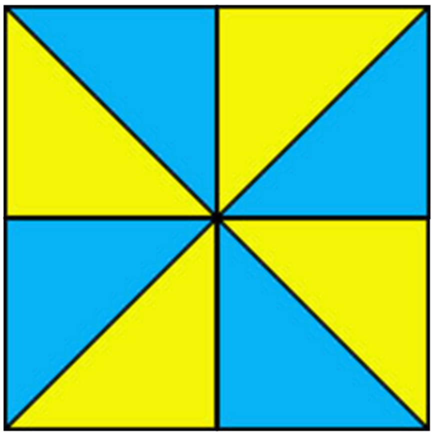


Avec ce carré de 4 cases, on peut alors réaliser un pavage, par translations successives :

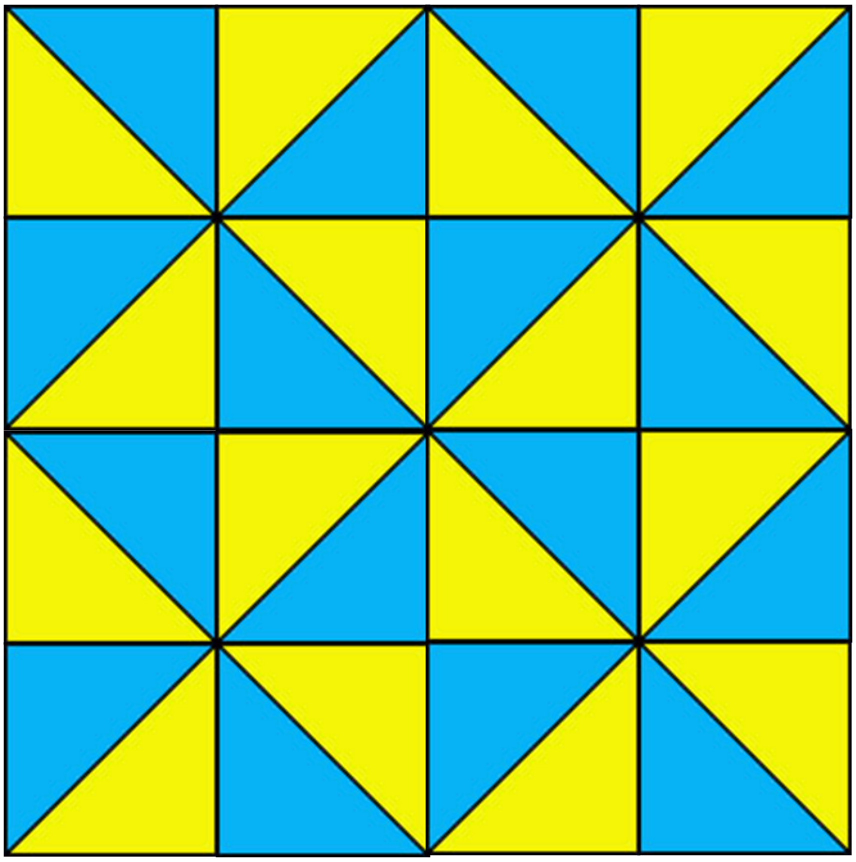


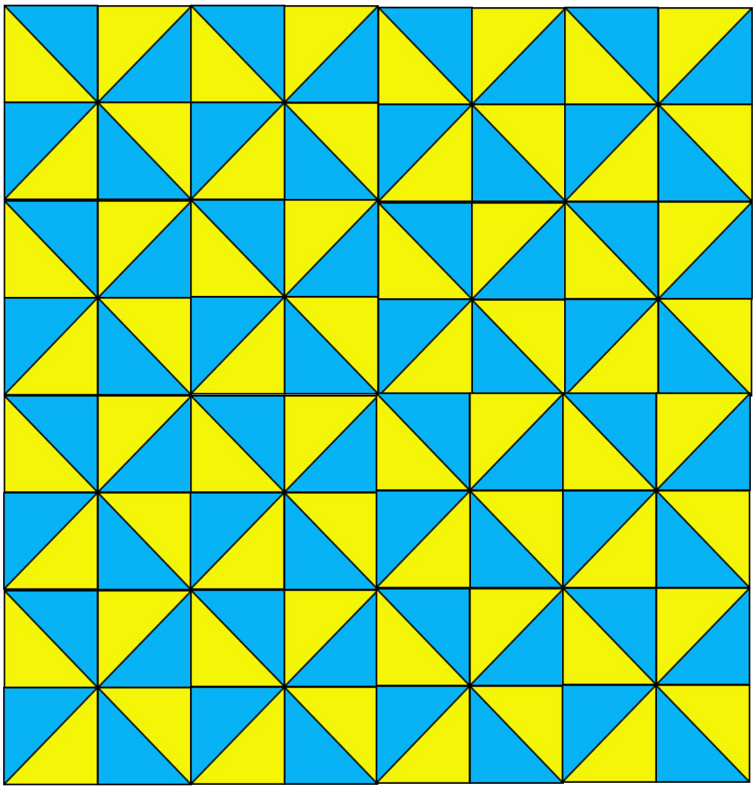


Un tel carré peut aussi être formé par un même couple de carrés, pris deux fois, le second ayant subi une rotation de 180 degrés. Par exemple, avec le modèle n°4 :

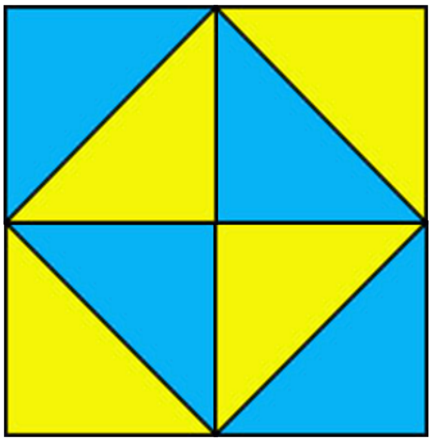


D'où le pavage obtenu par translations successives :

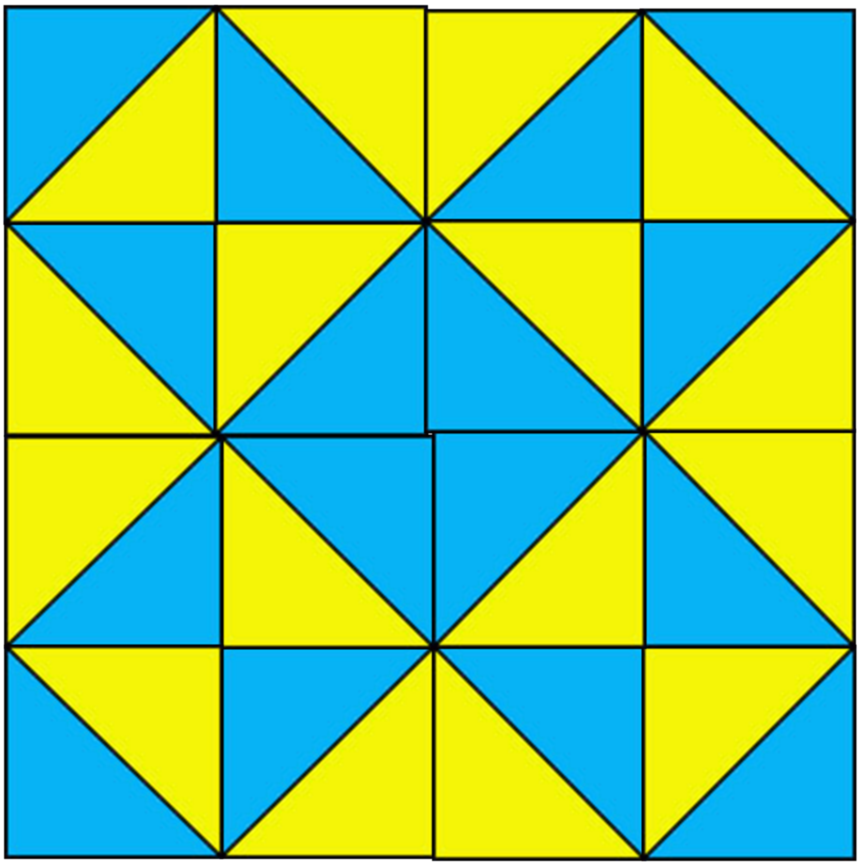


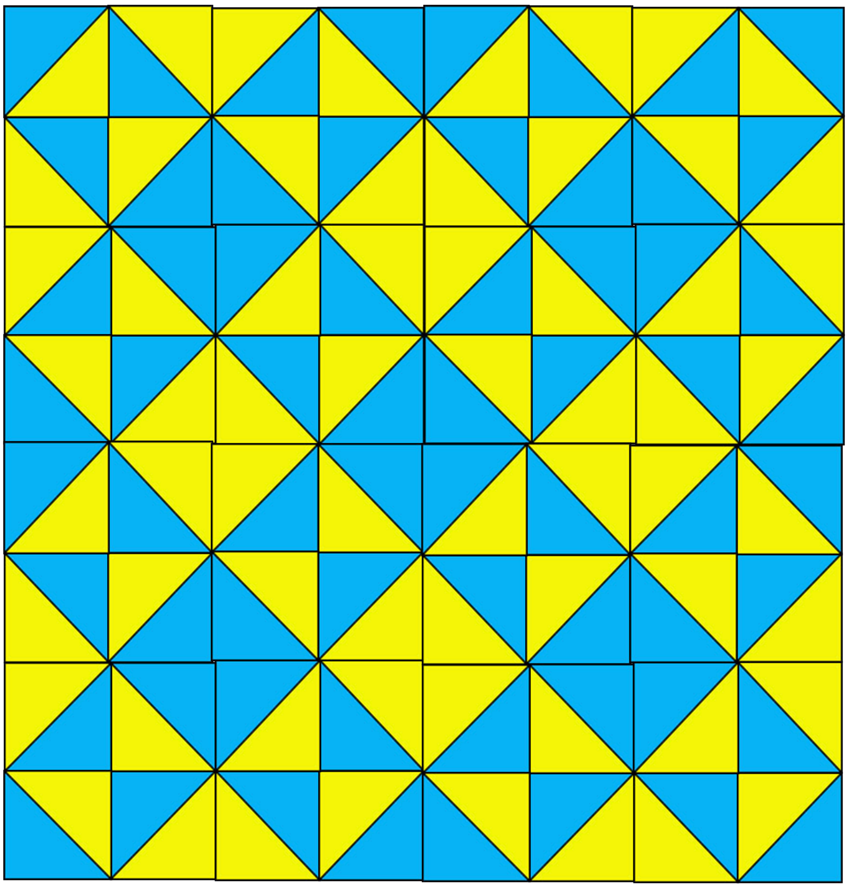


En voici un autre exemple obtenu avec <u>le modèle n°4</u> (ce même modèle est pris deux fois pour former un carré de 4 cases, une rotation de 180° étant effectuée sur l'un des exemplaires du modèle) :



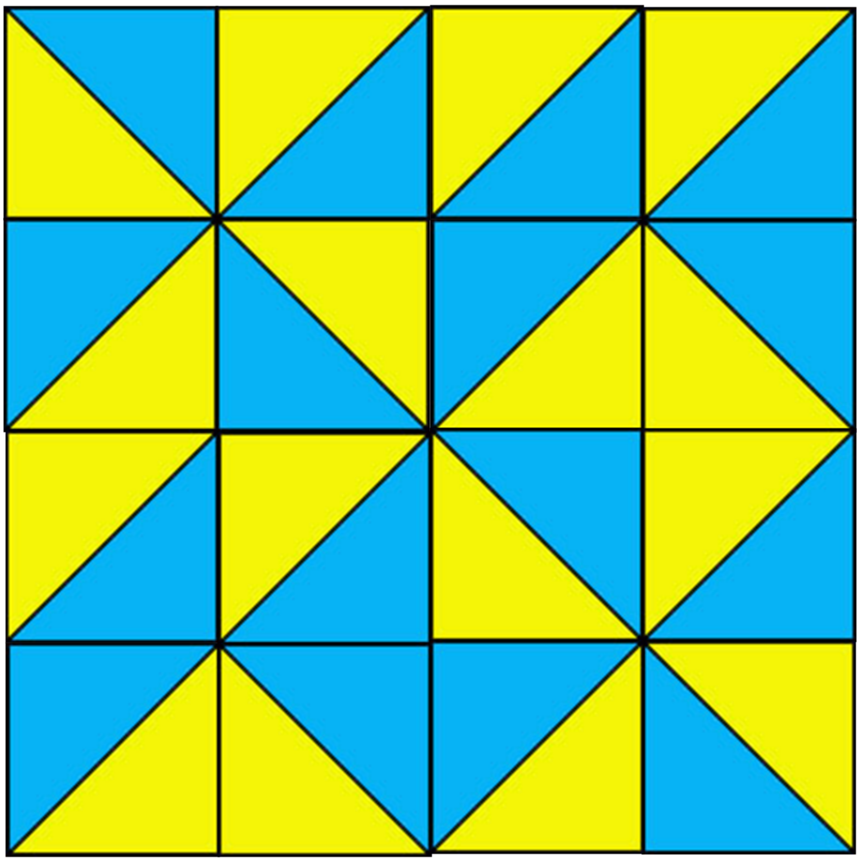
Avec ce carré de 4 cases, on va faire un carré de 16 cases en le reportant 4 fois et en appliquant des rotations de 90° à deux des carrés :

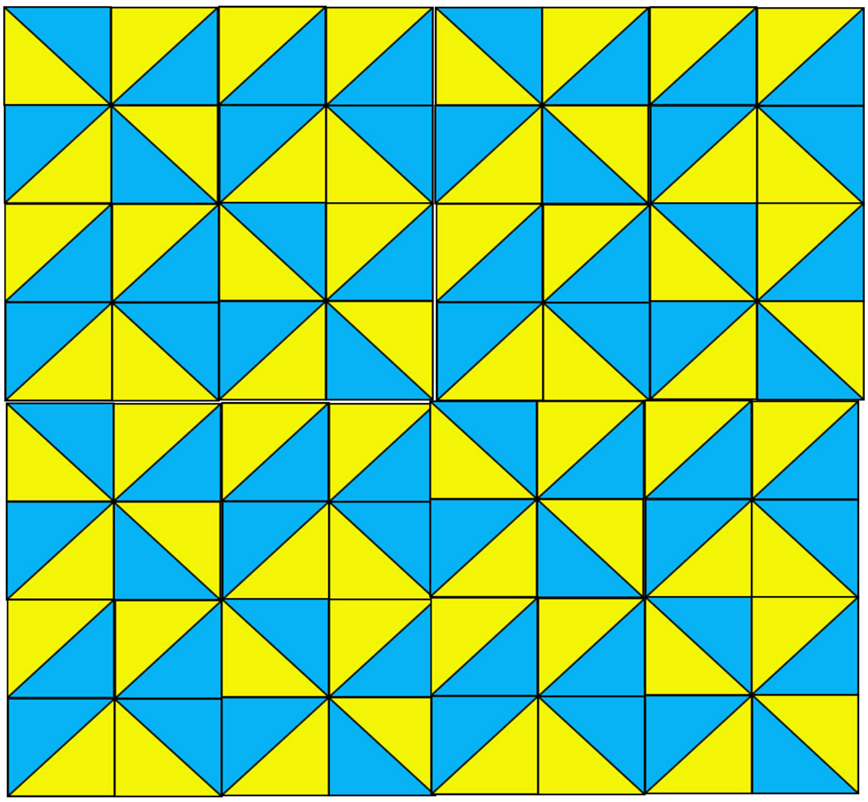




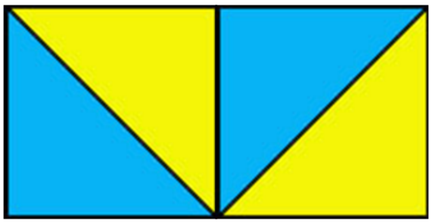
Avec 4 carrés de 4 cases obtenus par les manipulations précédentes, on peut construire un carré de 16 cases <u>qui servira lui-même de base pour un pavage</u>.
Par exemple, en prenant les deux carrés de 4 cases obtenus précédemment,

cela donne le grand carré suivant qu'il suffit de reproduire par translations successives :

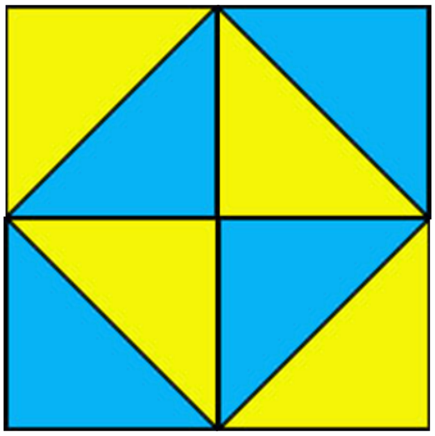




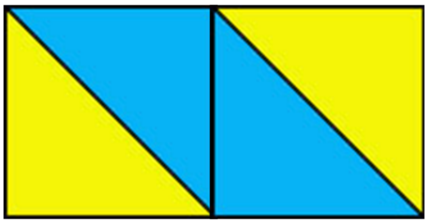
Ce principe peut être appliqué à des carrés plus grands (36, 64, 100, 144 cases, etc ; le nombre de carrés sur un côté est nécessairement pair).
Par exemple, avec le modèle n°6 (pris deux fois, le second ayant subi une rotation de 180°) :

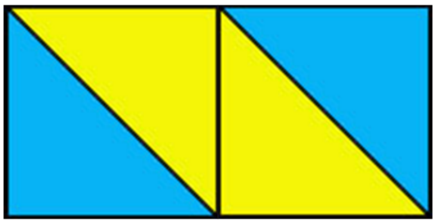


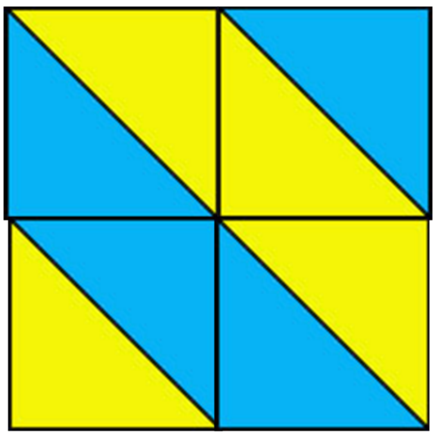
on obtient un carré de 4 cases :



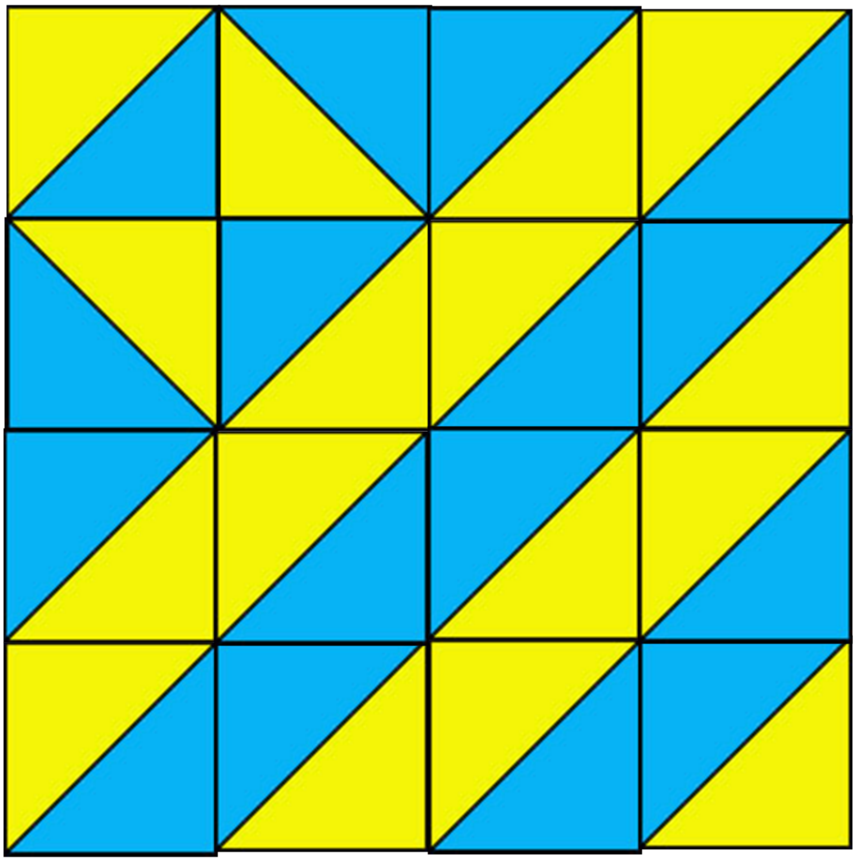
Avec les modèles n° 8 et n° 10, on procède de même :



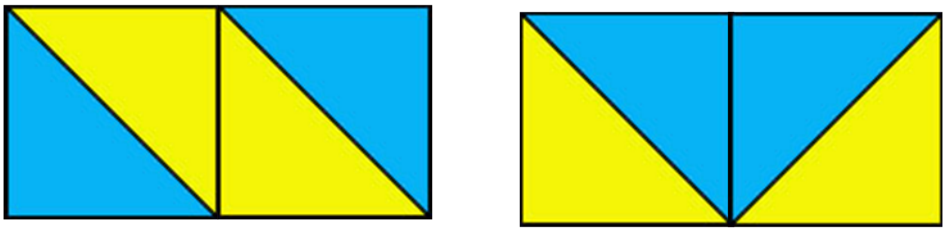


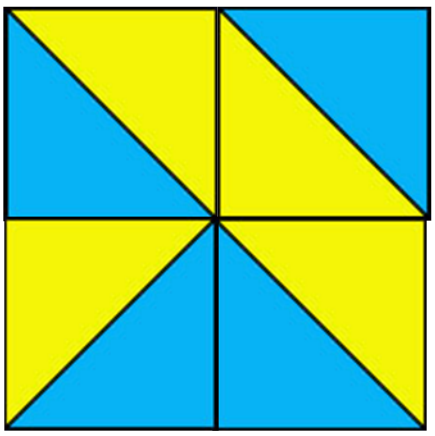


On constitue alors un carré de 16 cases en prenant le premier carré et trois fois le second (en lui faisant subir une rotation de 90 degrés) :

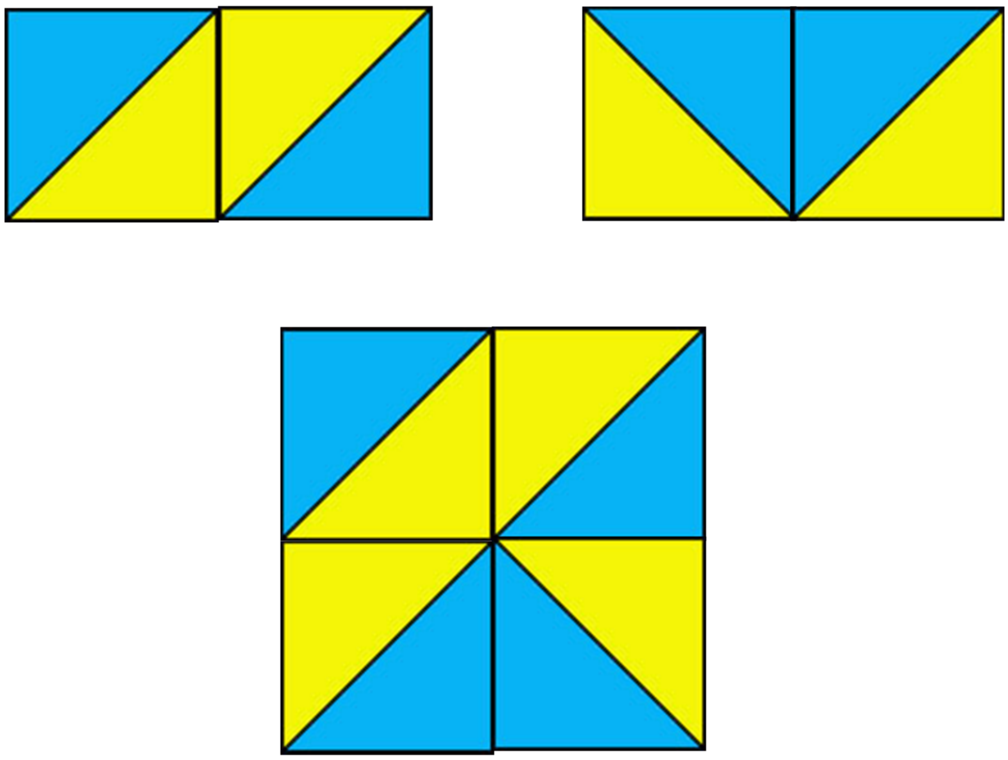


Maintenant, on utilise <u>les modèles n° 10 et n° 5</u> pour former un carré de 4 cases :

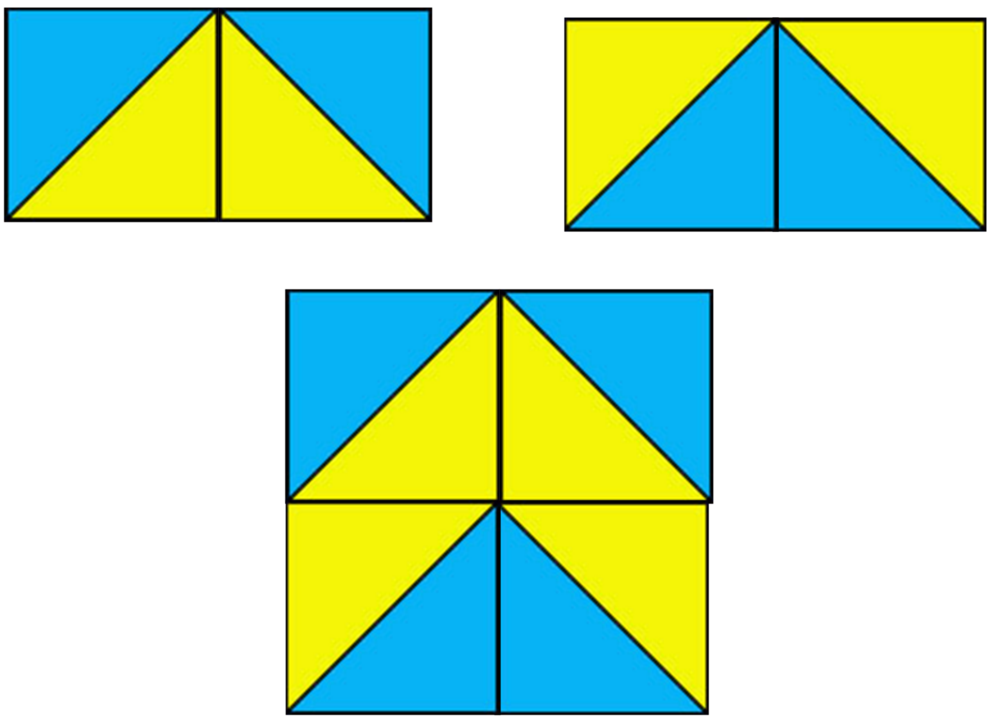




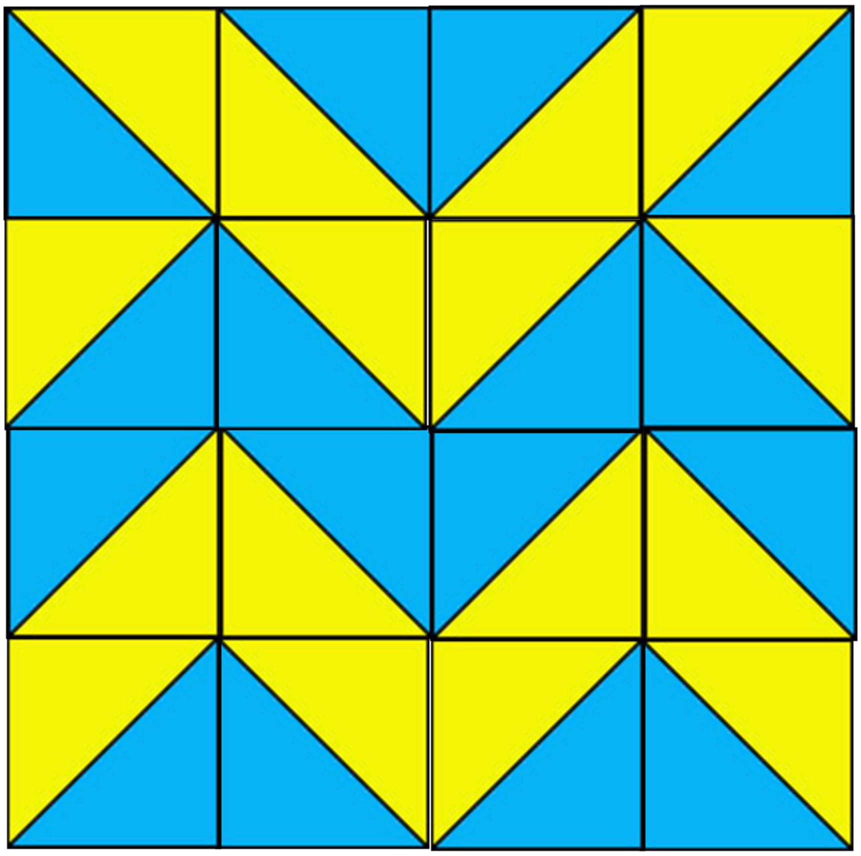
Avec les modèles n°7 et n° 5, on constitue un autre carré :



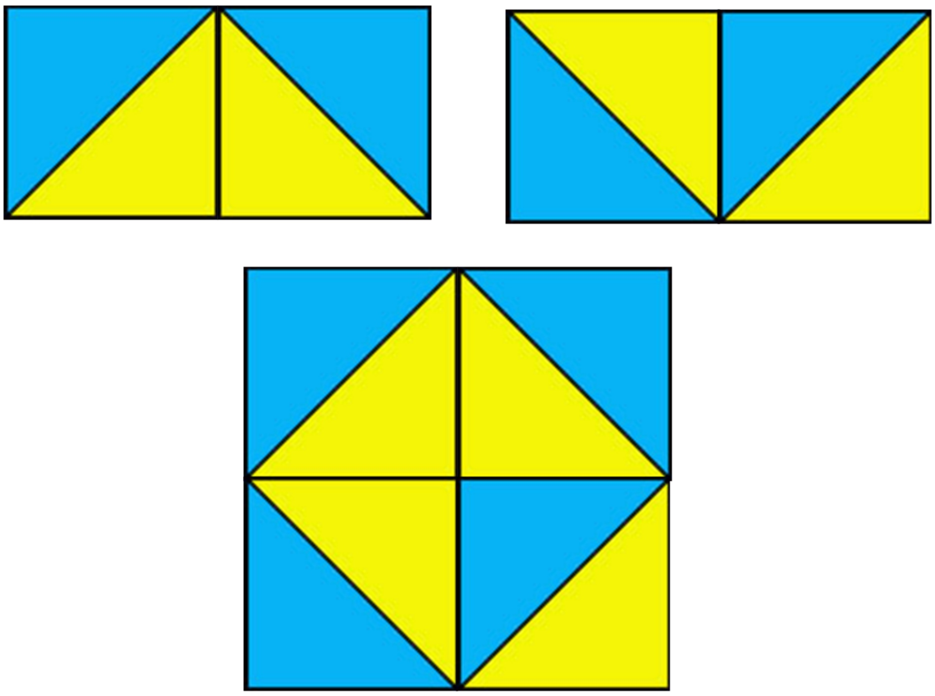
Avec les modèles n°3 et n°5, on forme un autre carré :



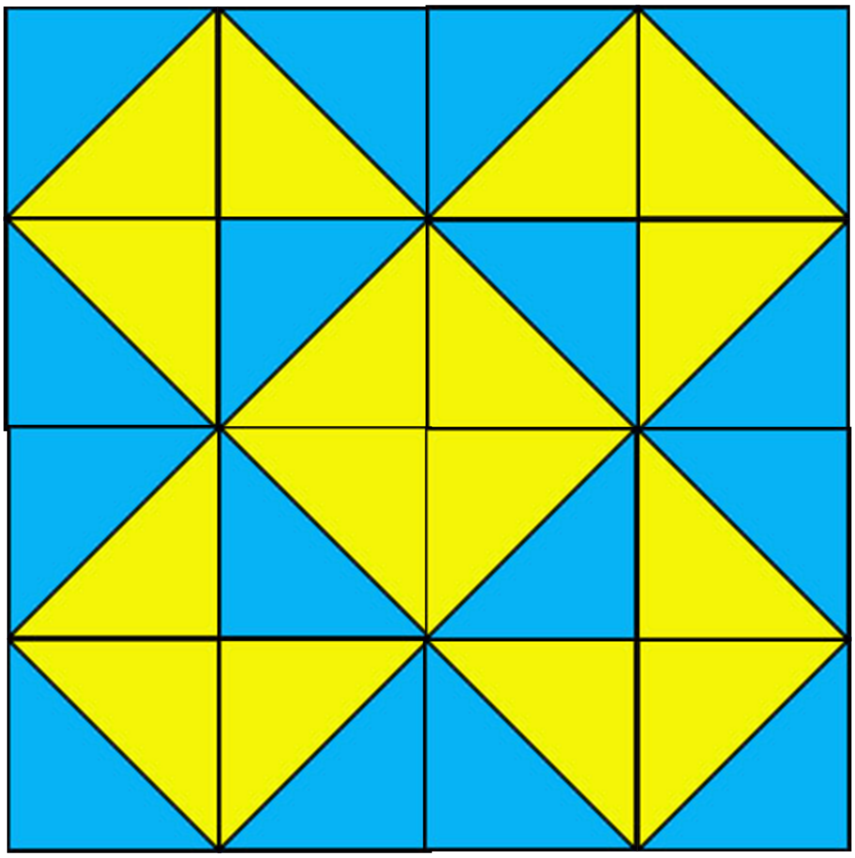
En prenant ces deux carrés et deux fois le troisième, on obtient un carré à 16 cases :



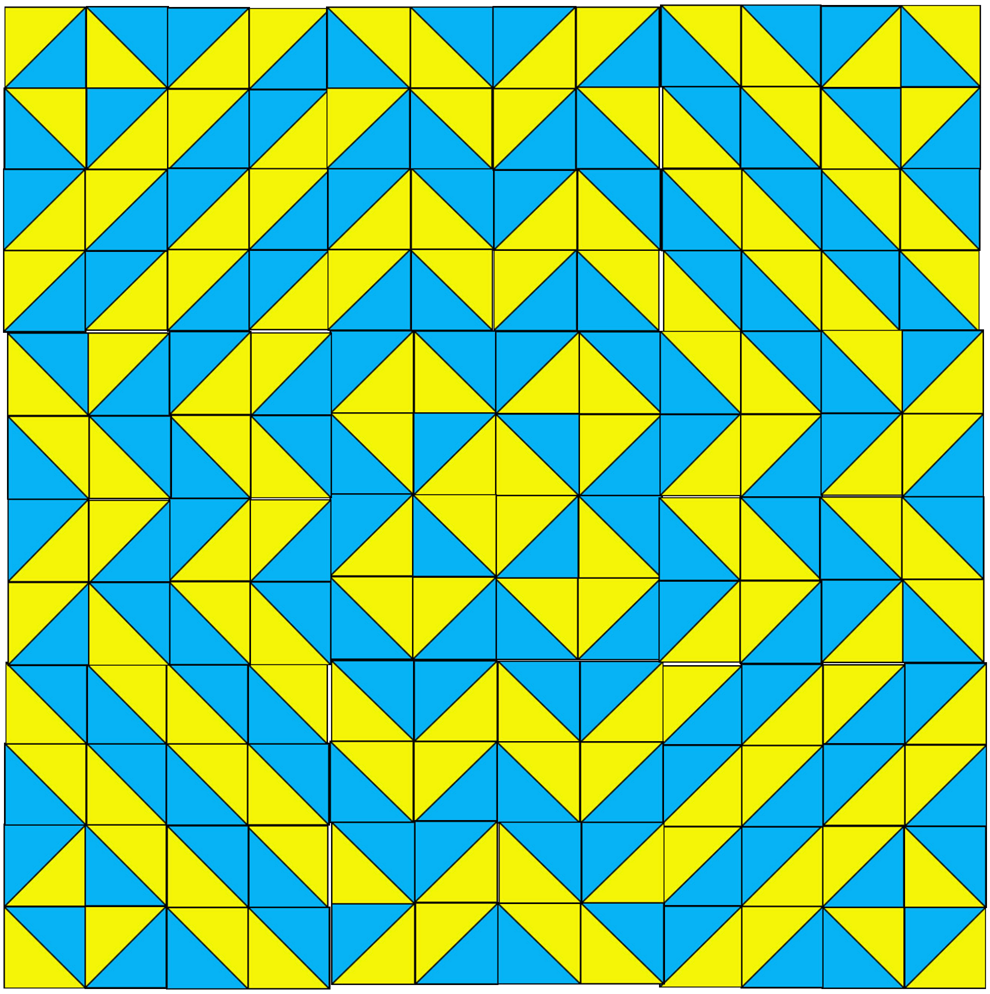
Avec les modèles n°3 et n° 6, on construit un carré à 4 cases :



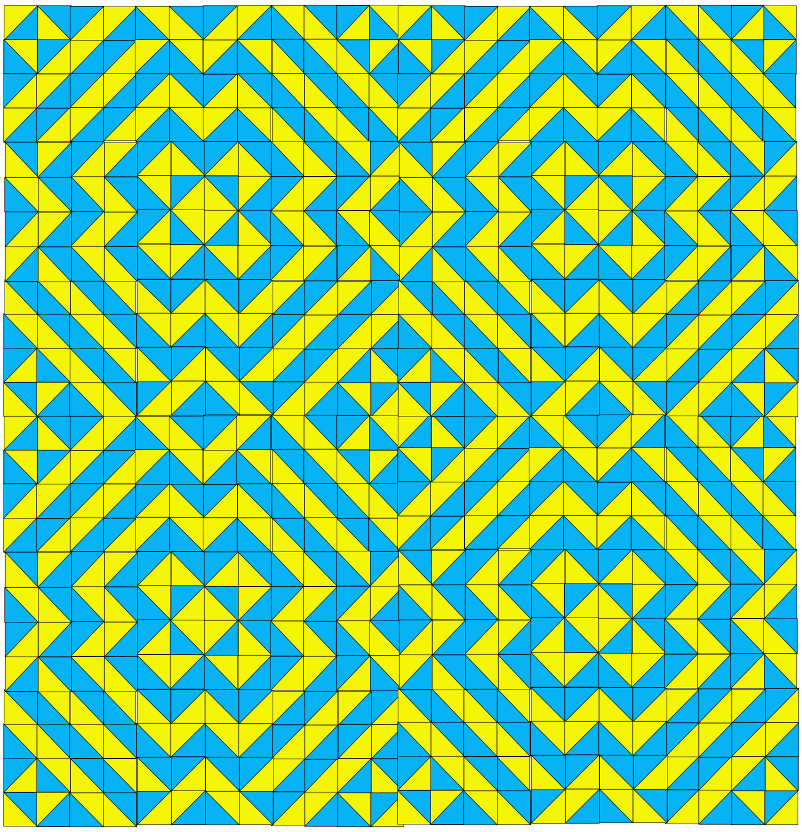
Avec ce carré et en effectuant des rotations de 90° dans les deux sens et une rotation de 180°, on obtient le carré suivant à 16 cases :



En prenant ces trois grands carrés de 16 cases, plusieurs fois, et en effectuant des rotations appropriées sur certains de ces carrés, on obtient le carré suivant à 144 cases :



Avec la dalle ainsi construite, on peut réaliser un très beau pavage en effectuant des translations successives de cette dalle :



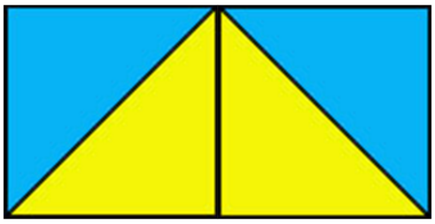
Bien entendu, on conçoit facilement que ce processus peut être reproduit avec des carrés de plus en plus grands dont le nombre de carrés est nxn, avec n nombre pair.

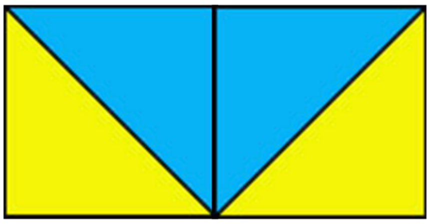
III. Les pavages de Truchet lineaires.

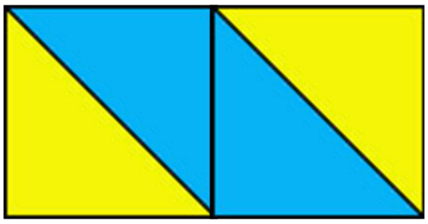
Les pavages réalisés dans la partie précédente produisent des résultats divers : à côté du caractère très esthétique de certains d'entre eux, d'autres ne seront pas retenus car les formes obtenues comportent des ruptures disgracieuses.

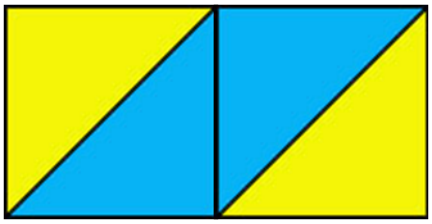
Pour éviter cela, on va s'imposer une règle (R) : **la juxtaposition de deux carrés ne doit se faire que si les zones adjacentes sont de la même couleur**. Autrement dit, les changements de couleur ne se font plus sur les côtés, mais uniquement sur les diagonales.

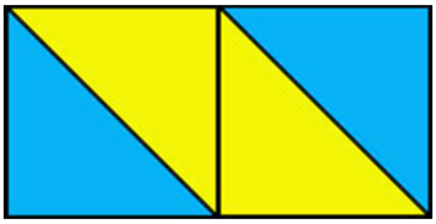
Dans ce cas, les seuls couples de carrés possibles sont les suivants :

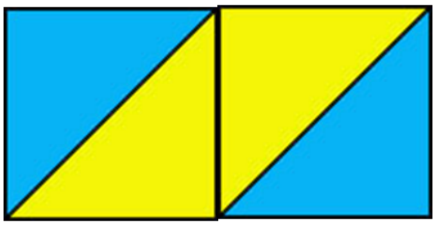
1.


2.


3.


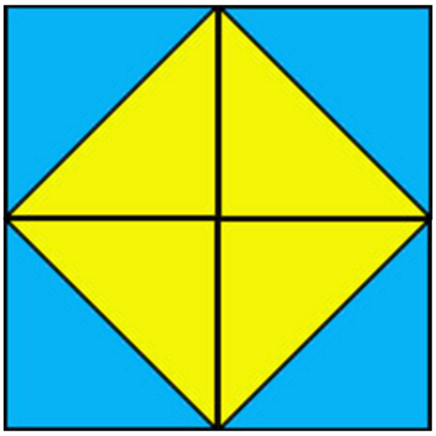
4.


5.


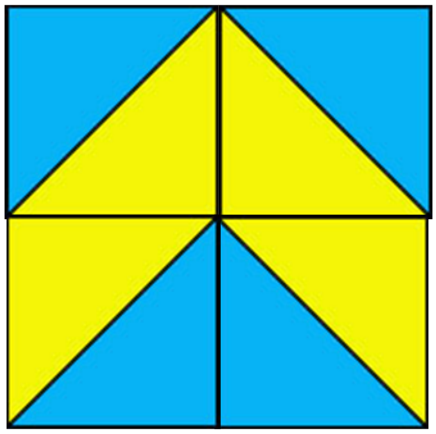
6.


On conçoit que, dans ce cas, les carrés de 4 cases qu'on peut obtenir sont les suivants , avec la règle R:

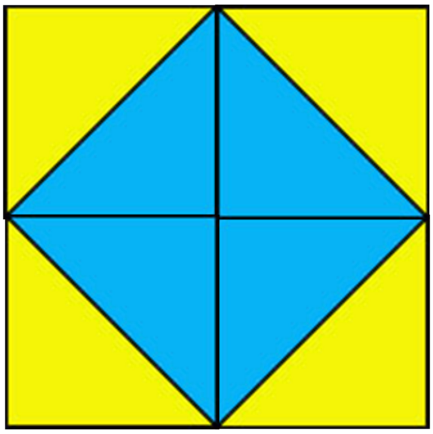
1.



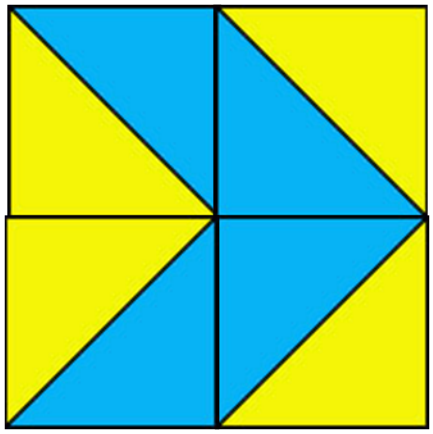
2.



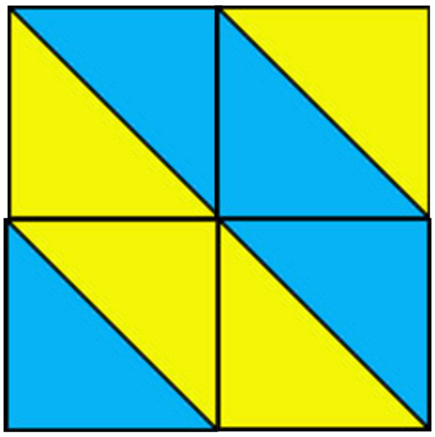
3.



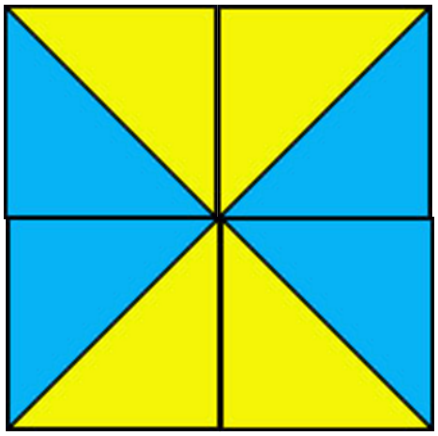
4.



5.

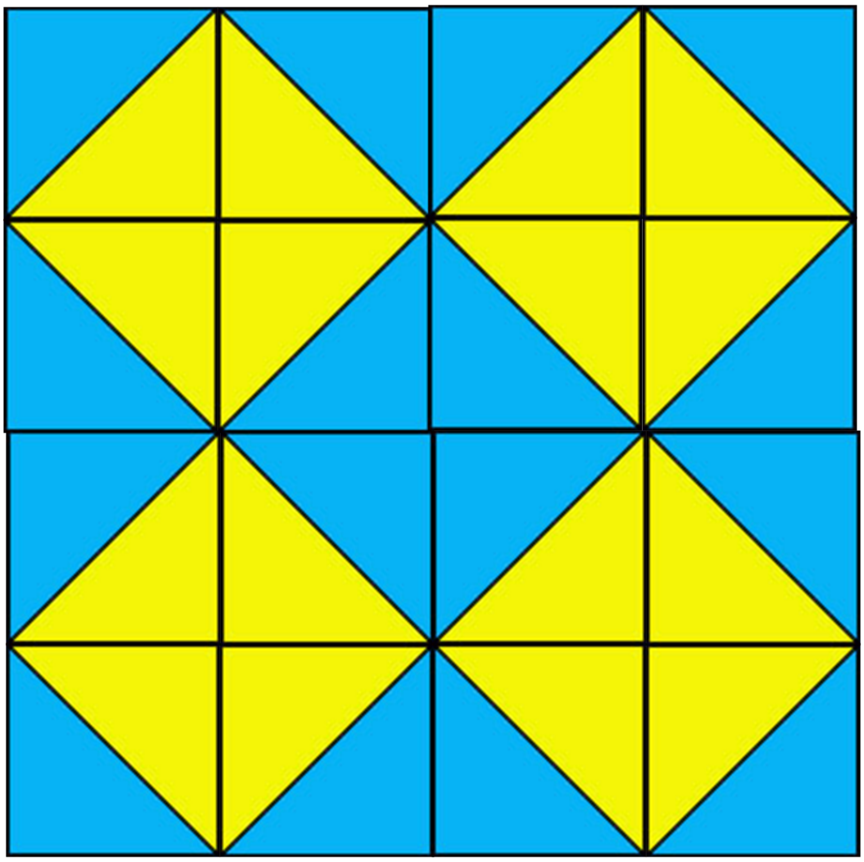


6.

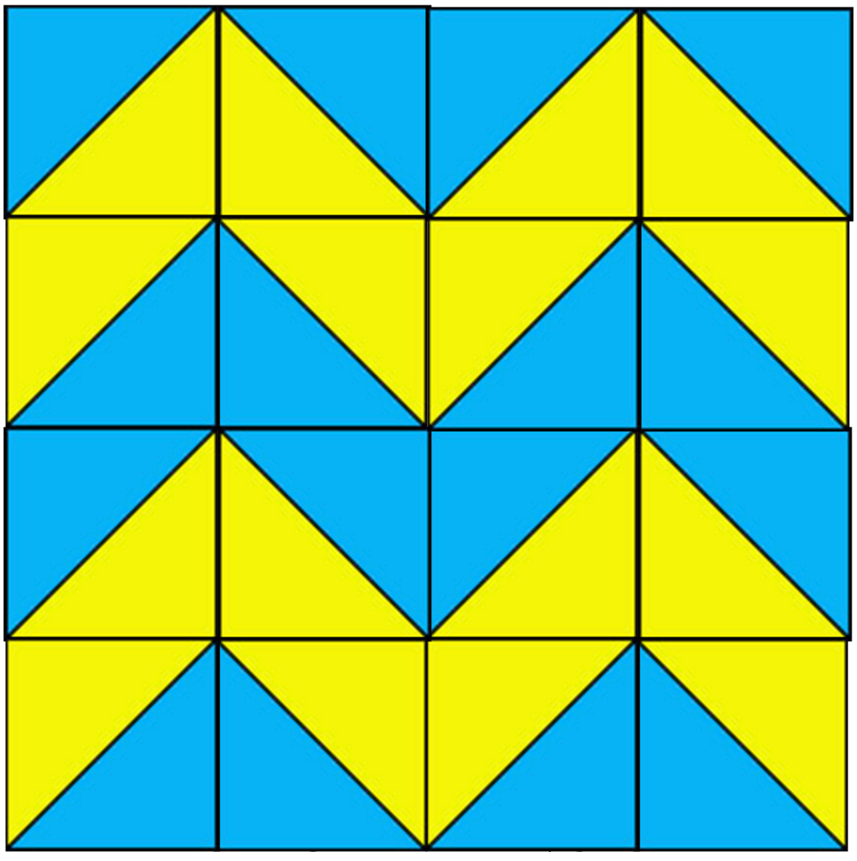


Par translations successives de ces carrés à 4 cases, on obtient des pavages de Truchet linéaires (TL). On constate que la règle R est bien respectée :

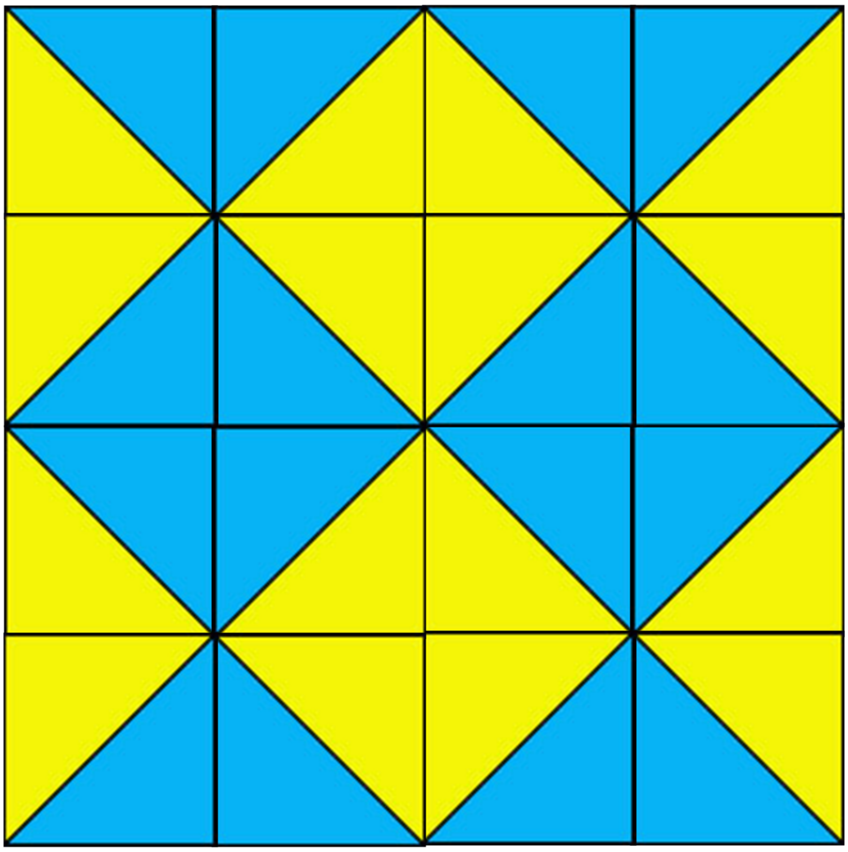
A.



B.

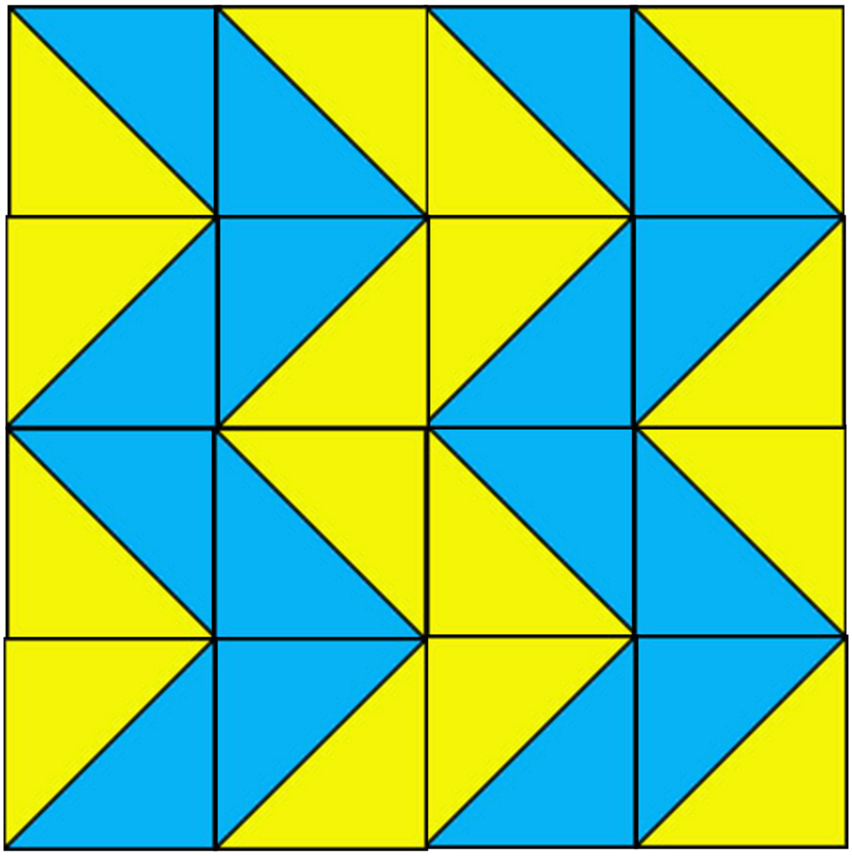


C.



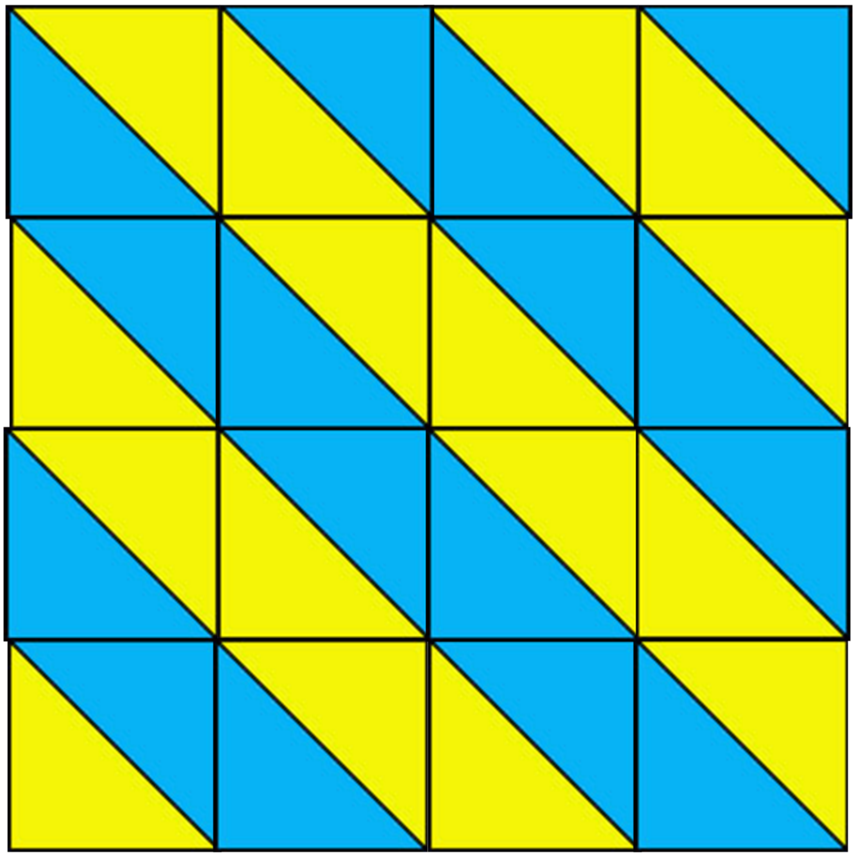
(ce pavage est identique au pavage A)

D.

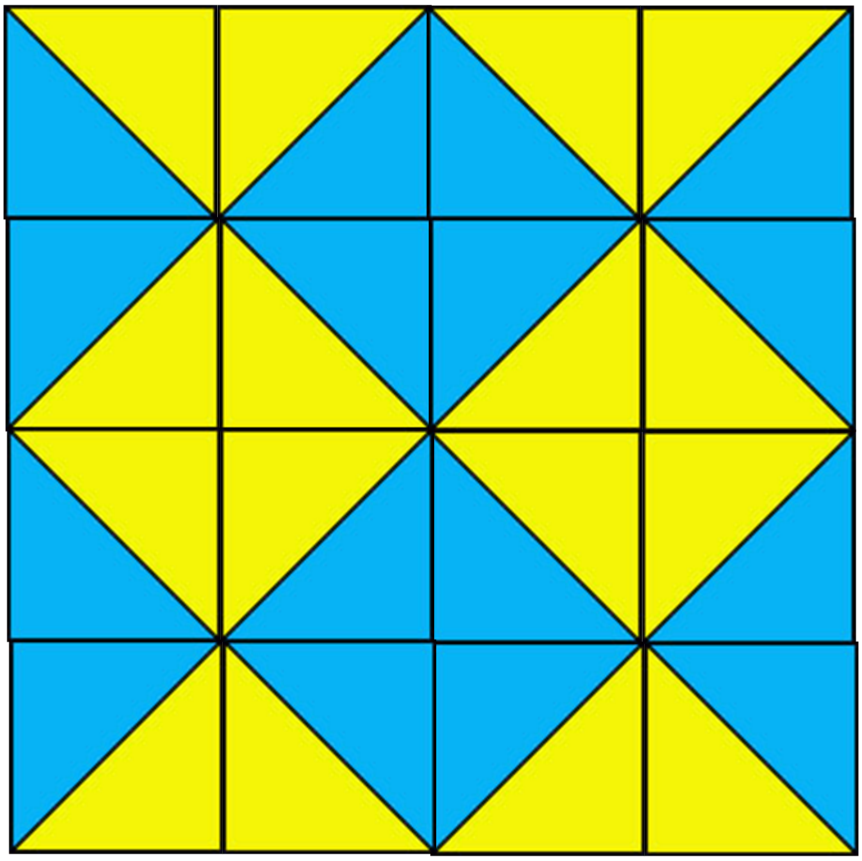


(ce pavage est identique au pavage B, à l'orientation près)

E.

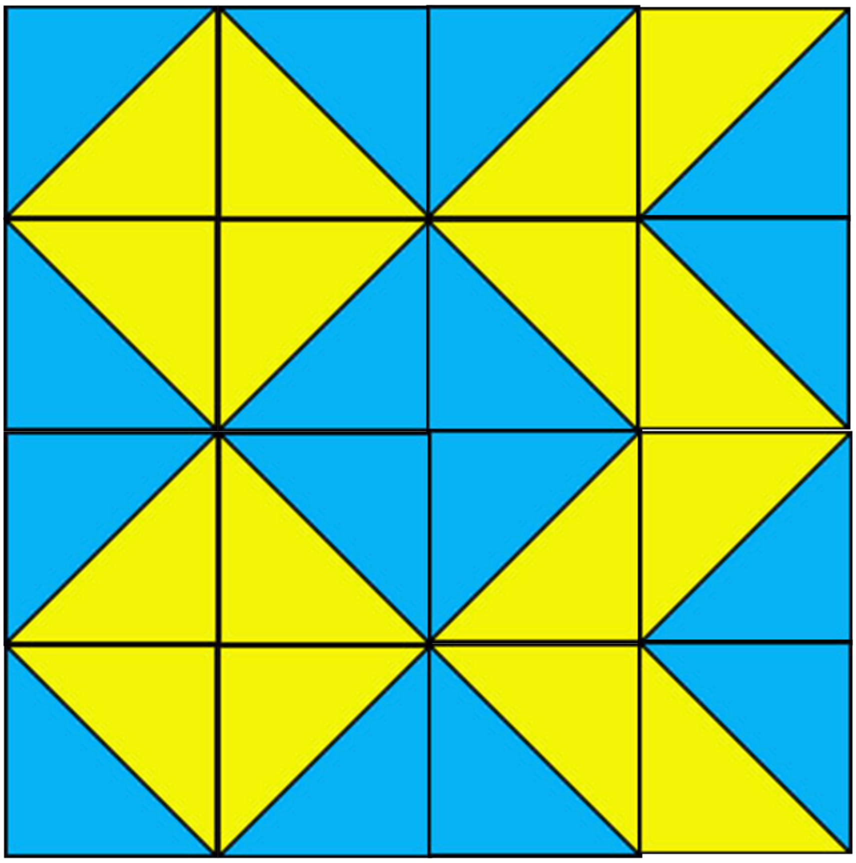


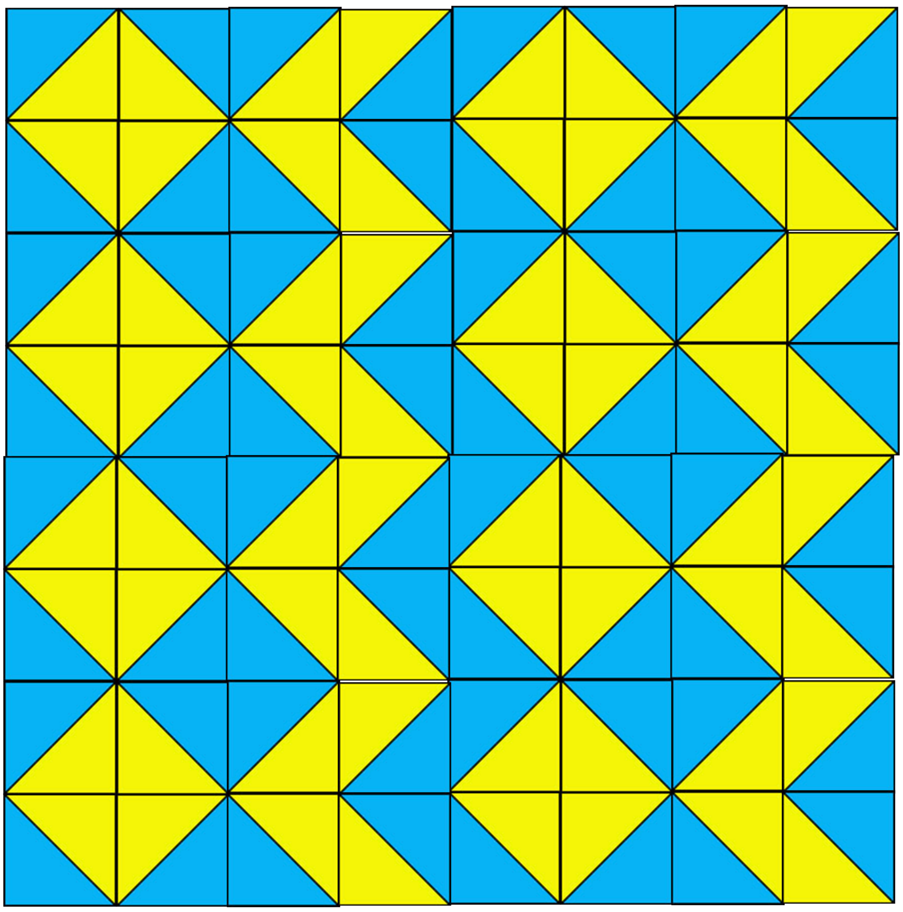
F.



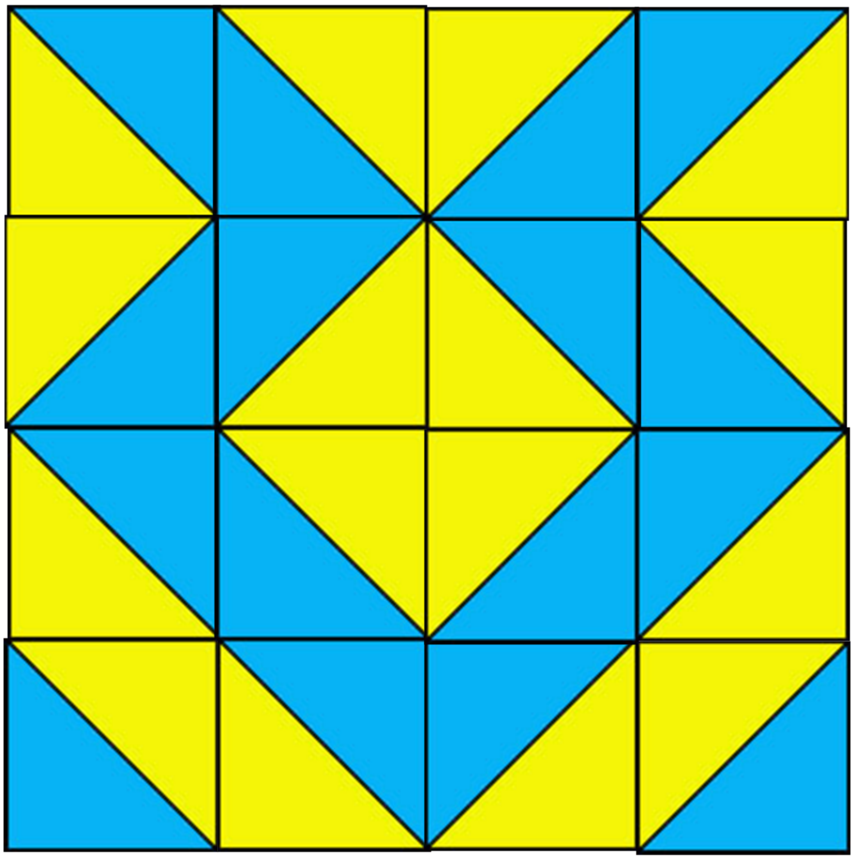
(ce pavage est identique aux pavages A et C)

Il est tout fait possible de construire un carré à 16 cases en utilisant 2 ou 4 carrés différents. Par exemple, avec les carrés 1 et 2, on obtient :

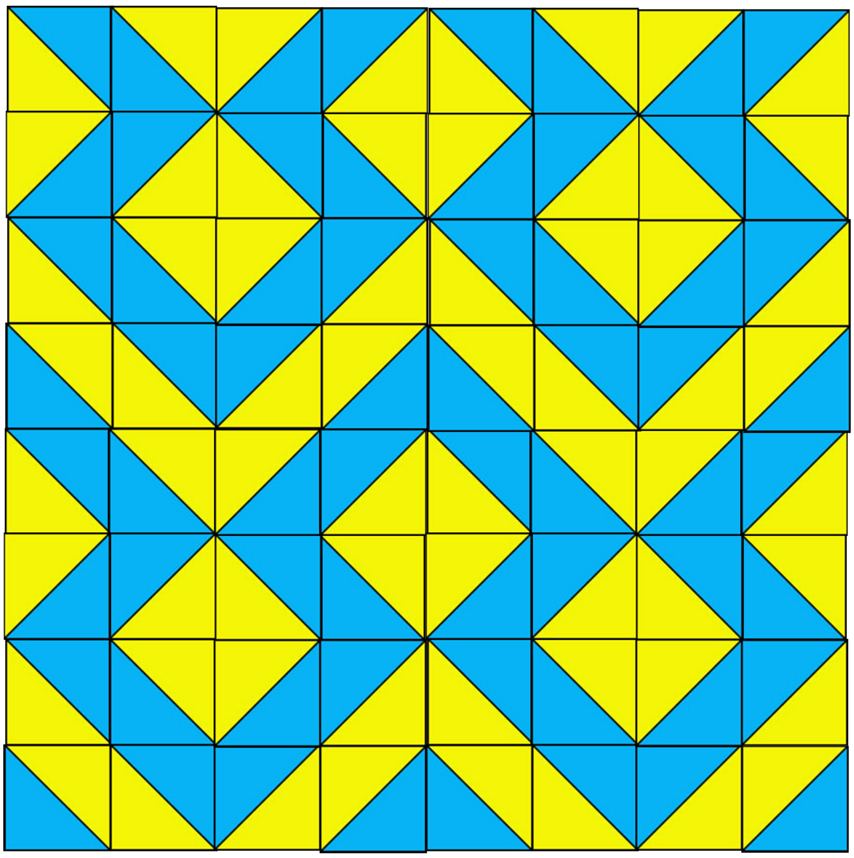


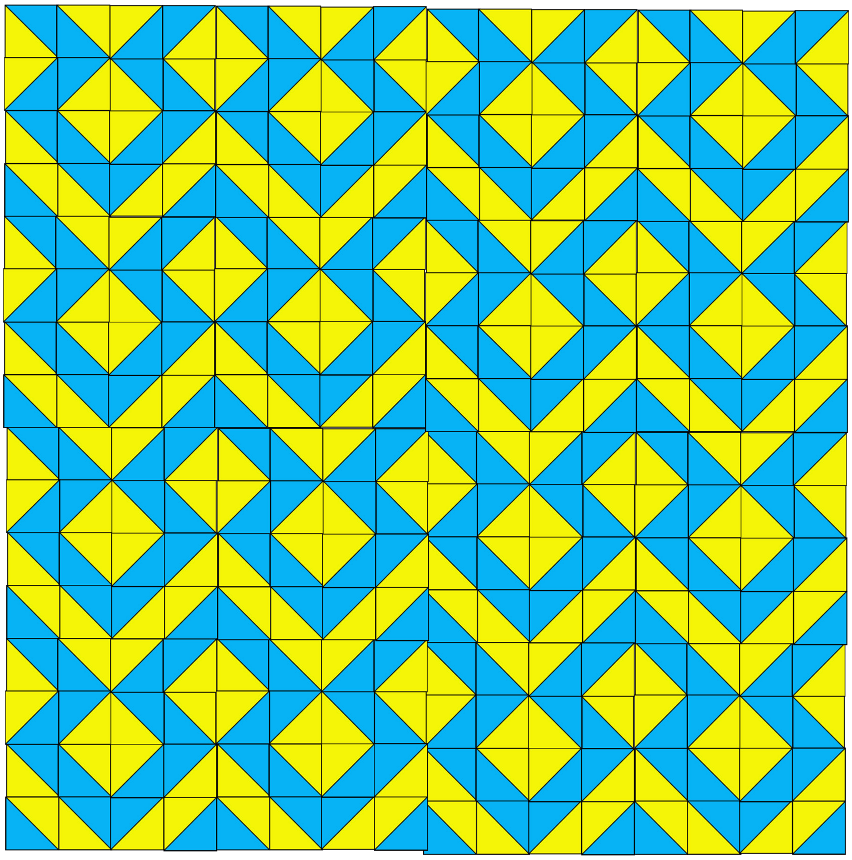


Différents modèles à 16 cases peuvent ainsi être constitués. Voici encore un exemple (il ne faut pas oublier que la règle R doit être respectée, ce qui conduit à effectuer des rotations des carrés):

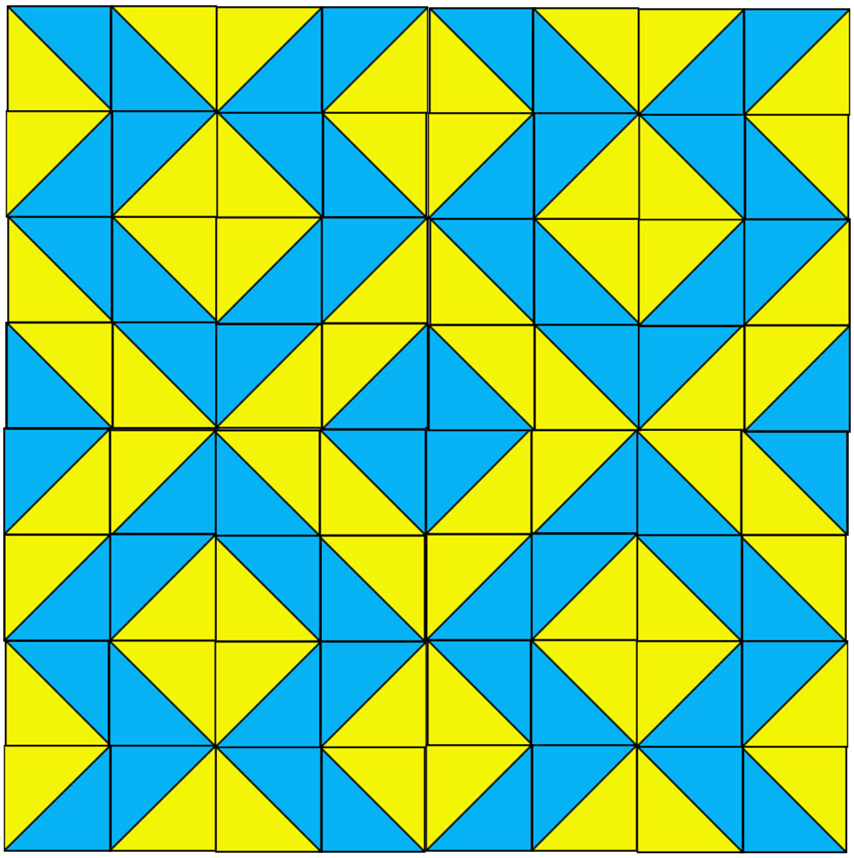


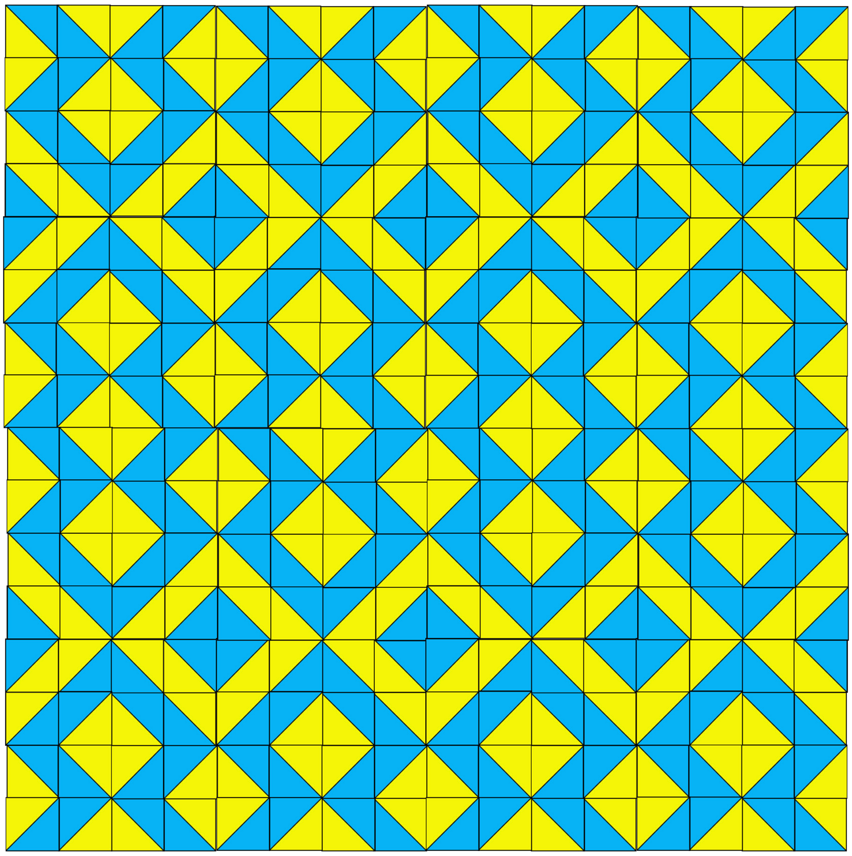
Par translations successives, on obtient :



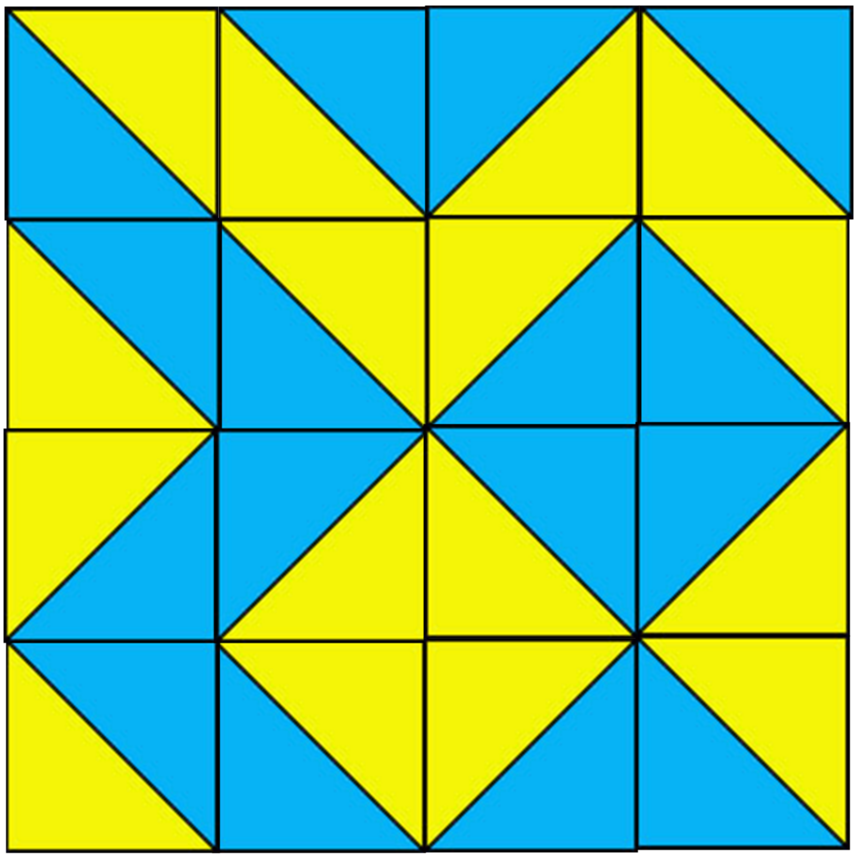


Avec les mêmes carrés, mais en effectuant des rotations de 180° de deux des pièces (tout en respectant la règle R), on obtient :

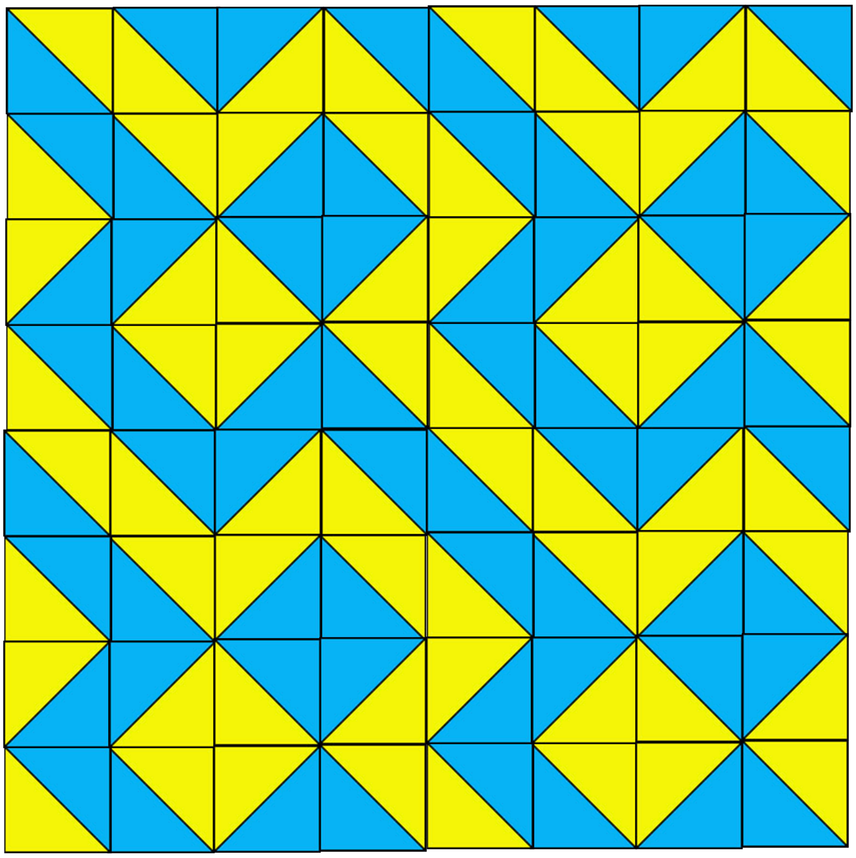


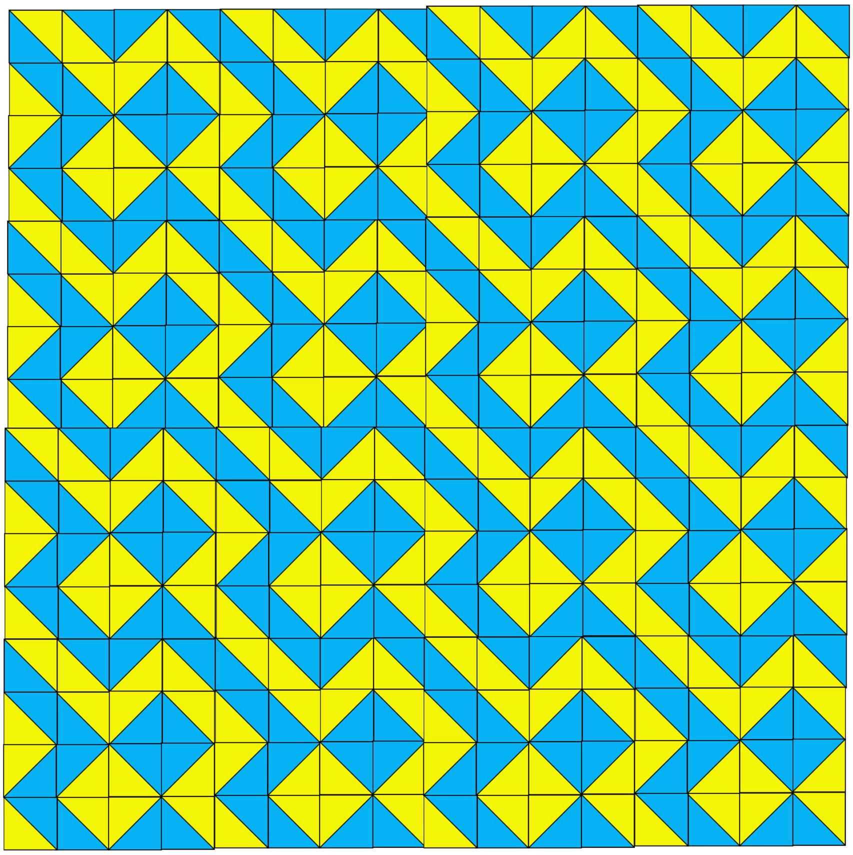


Pour nous faire plaisir, réalisons un dernier pavage avec les carrés n°5, n°2, n°4 et n°6 convenablement disposés selon la règle R (rotations de 90° ou 180° si nécessaire) :



D'où le pavage obtenu par translations successives :





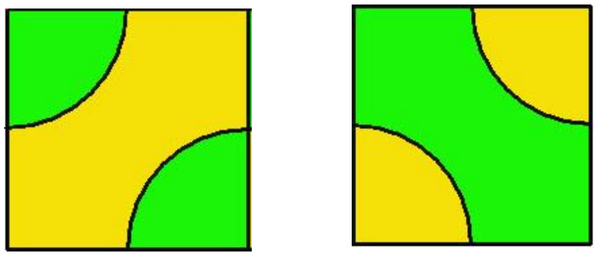
Voir d'autres exemples en annexe.

IV. Les pavages de Truchet etendus.

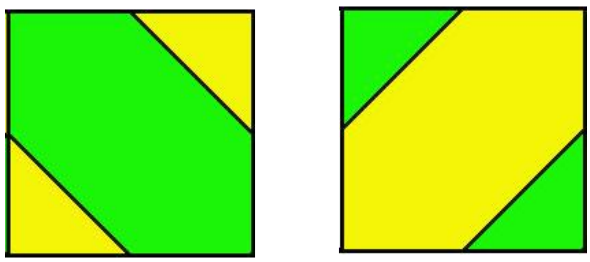
Comme nous l'avons vu, Truchet ne s'est intéressé qu'aux carrés bicolores séparés par une diagonale. Cela suffit pour réaliser une grande variété de pavages et laisser vagabonder son imagination. Cependant, l'idée est venue à certains de changer la disposition intérieure des carrés, tout en conservant la double couleur. Ils permettent des réalisations différentes et de belle qualité. C'est ce qu'on appellera les pavages de Truchet étendus (TE).

Voici des exemples de carrés :

<u>Exemple 1</u> (deux exemplaires avec les couleurs inversées) :



<u>Exemple 2</u> (deux exemplaires avec les couleurs inversées) :



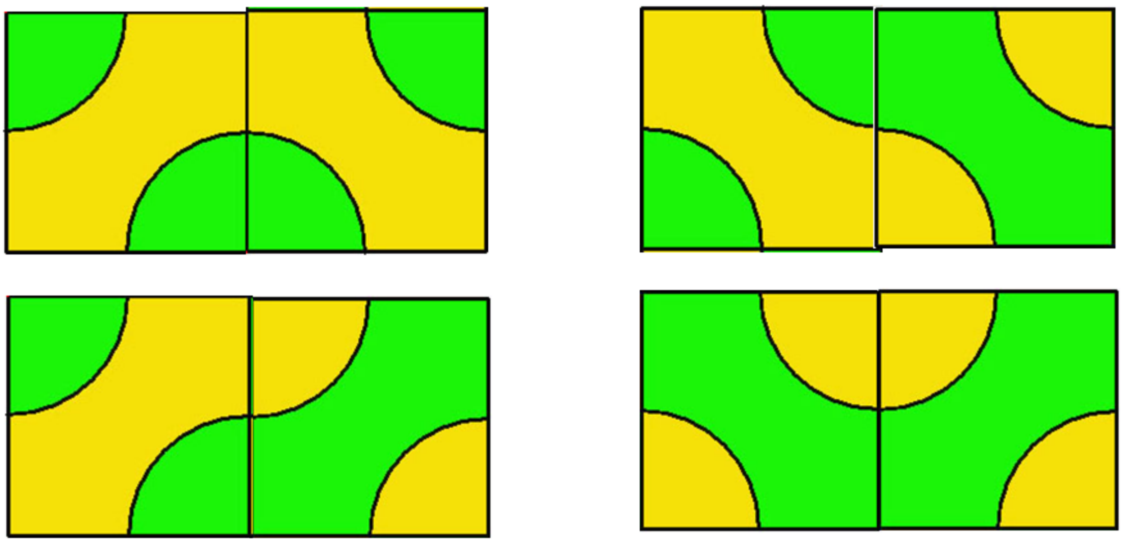
<u>Exemple 3</u> (un seul exemplaire) :

On remarquera que, pour chaque exemple, les tracés ne sont pas effectués au hasard : il faut que les segments ou les arcs de cercle coïncident lors des juxtapositions effectuées , même à la suite de la rotation des pièces.

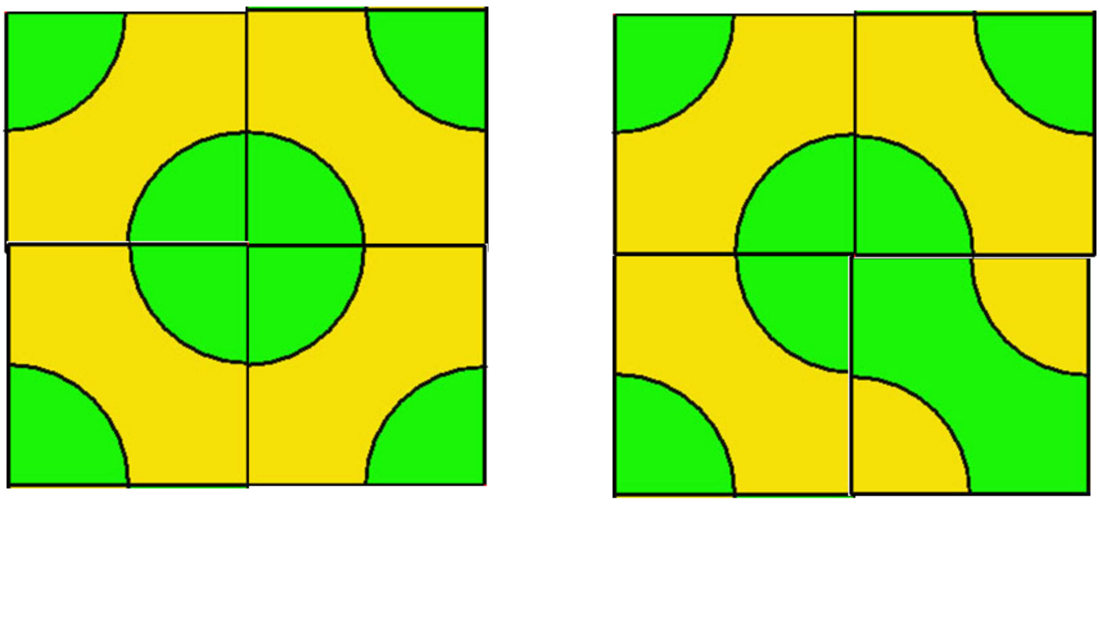
Le travail sur ces pièces se fait exactement comme avec les pavages de Truchet linéaires et on respectera ici aussi la règle R : les couleurs doivent correspondre sur les côtés des carrés.

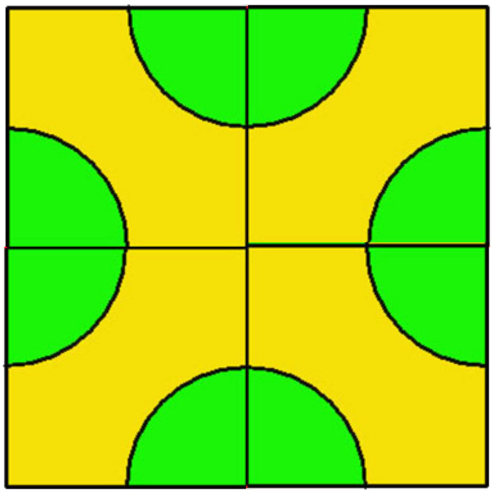
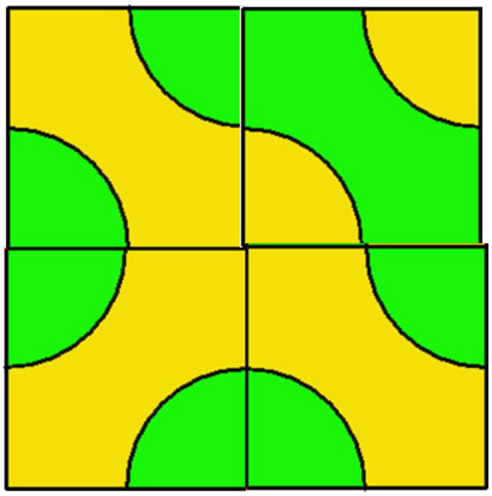
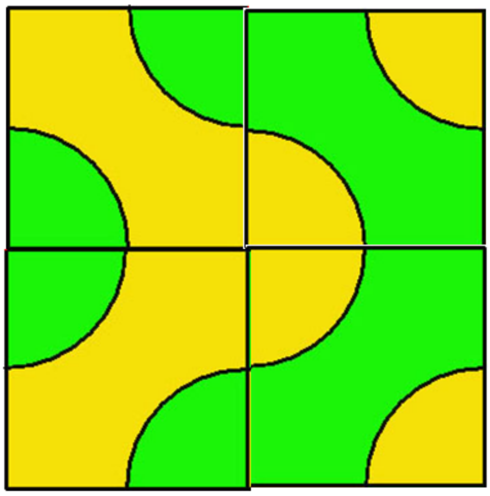
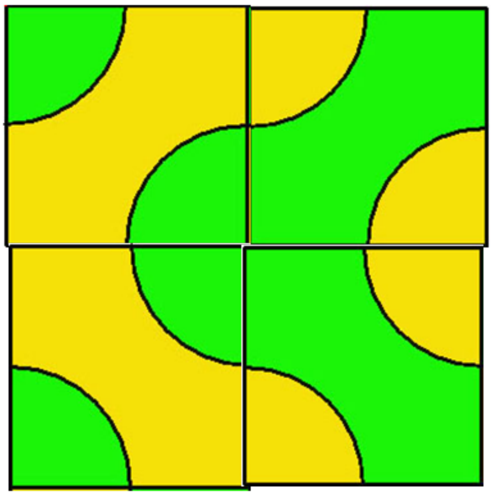
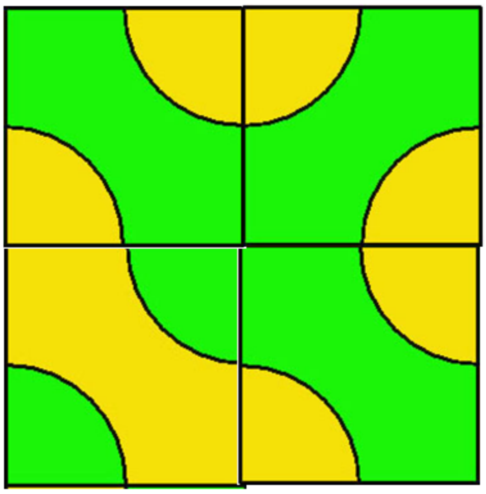
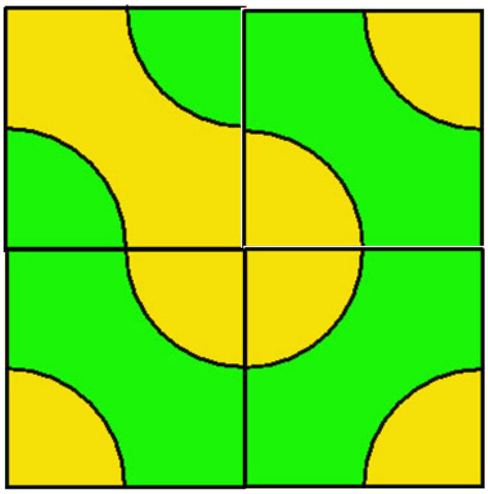
Travaillons tout d'abord à partir des carrés de l'exemple 1 :

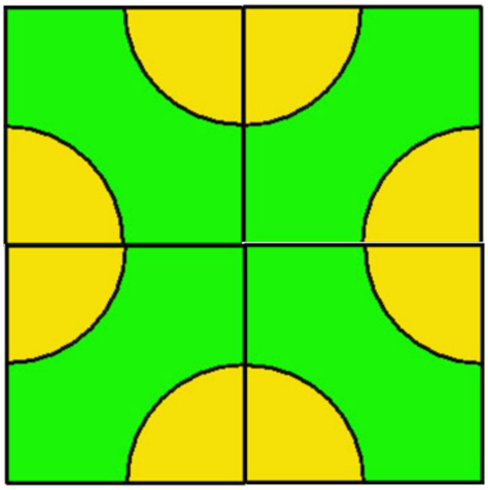
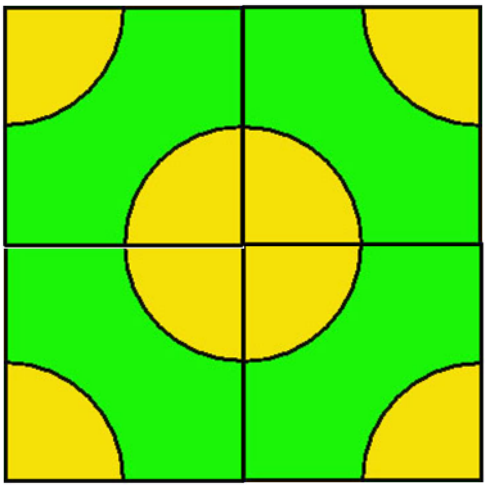
Quatre juxtapositions des deux pièces sont possibles (aux rotations près) :



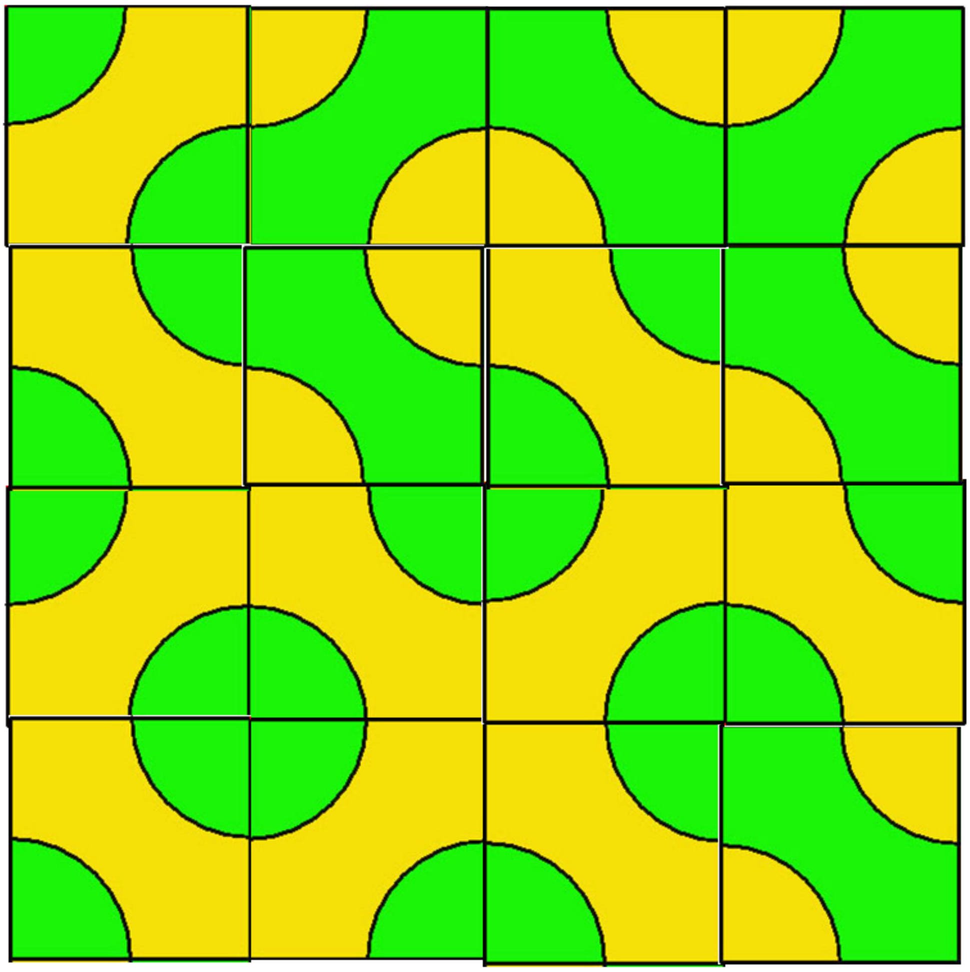
On peut alors réaliser des carrés à 4 cases :



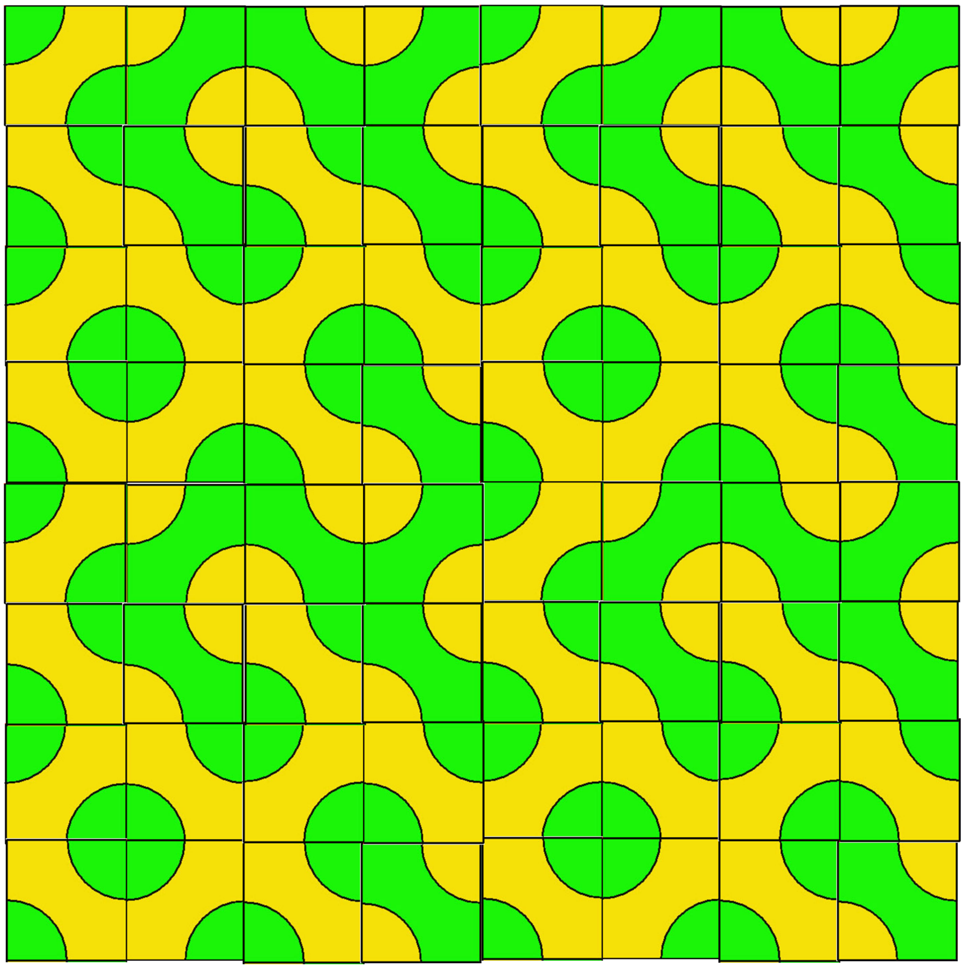







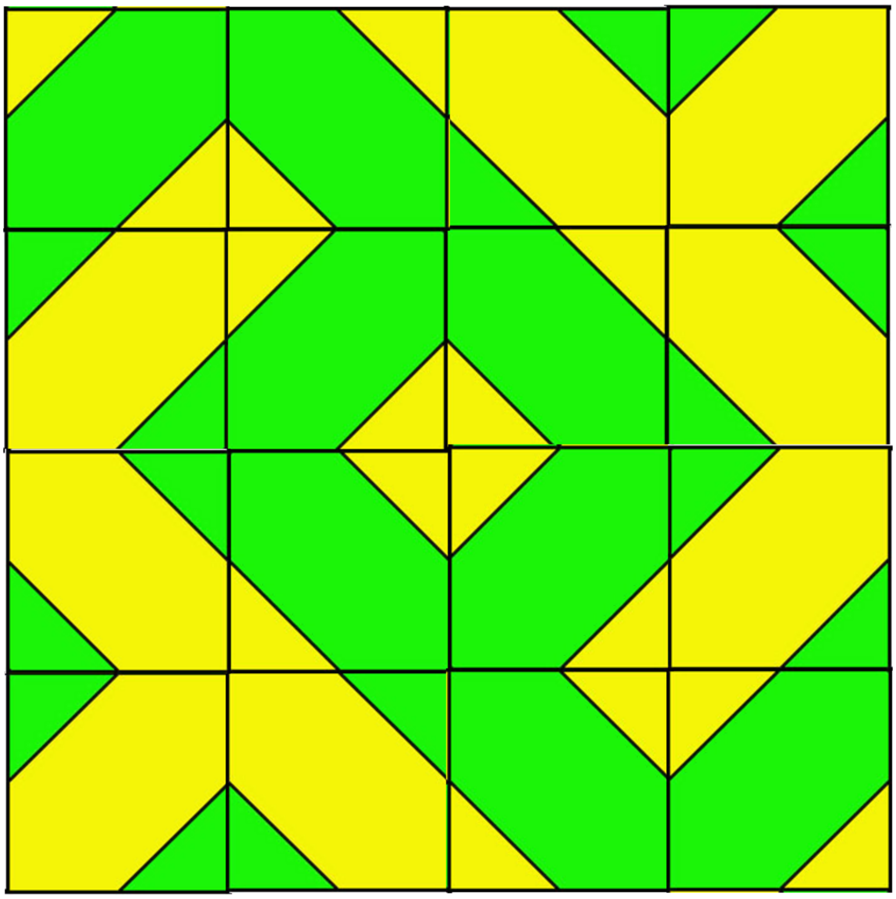
Avec quatre de ces carrés, en respectant la règle R, on peut fabriquer des carrés plus grands (à 16, 36, 64 cases, etc.). En voici un :

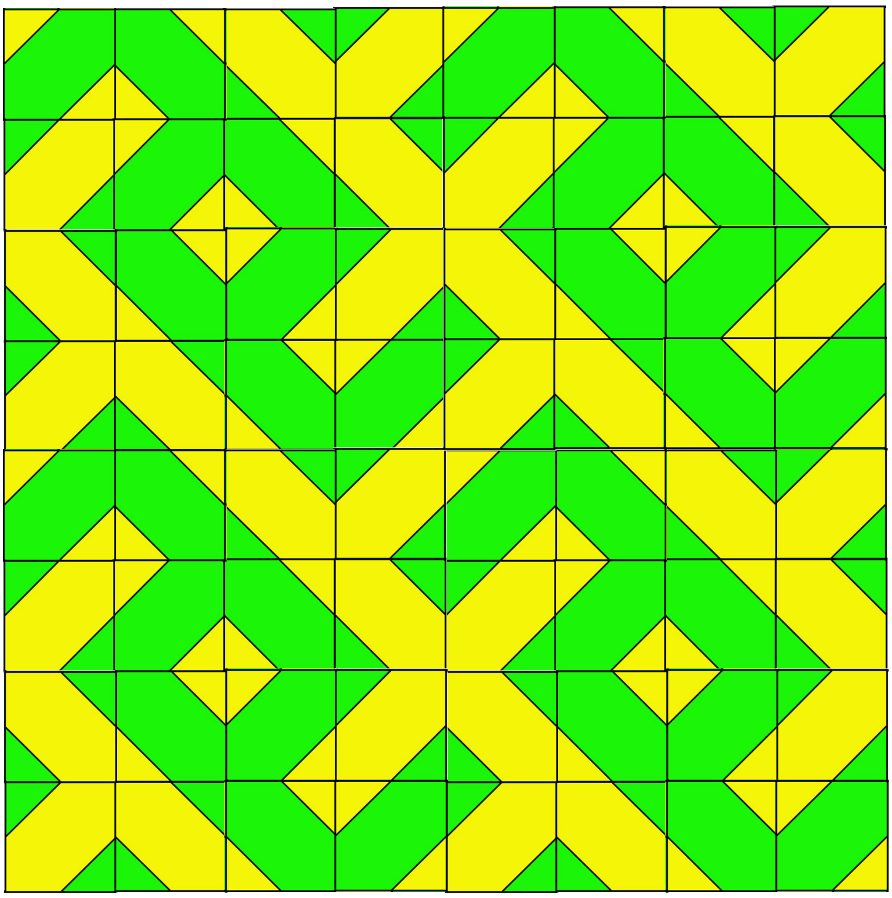


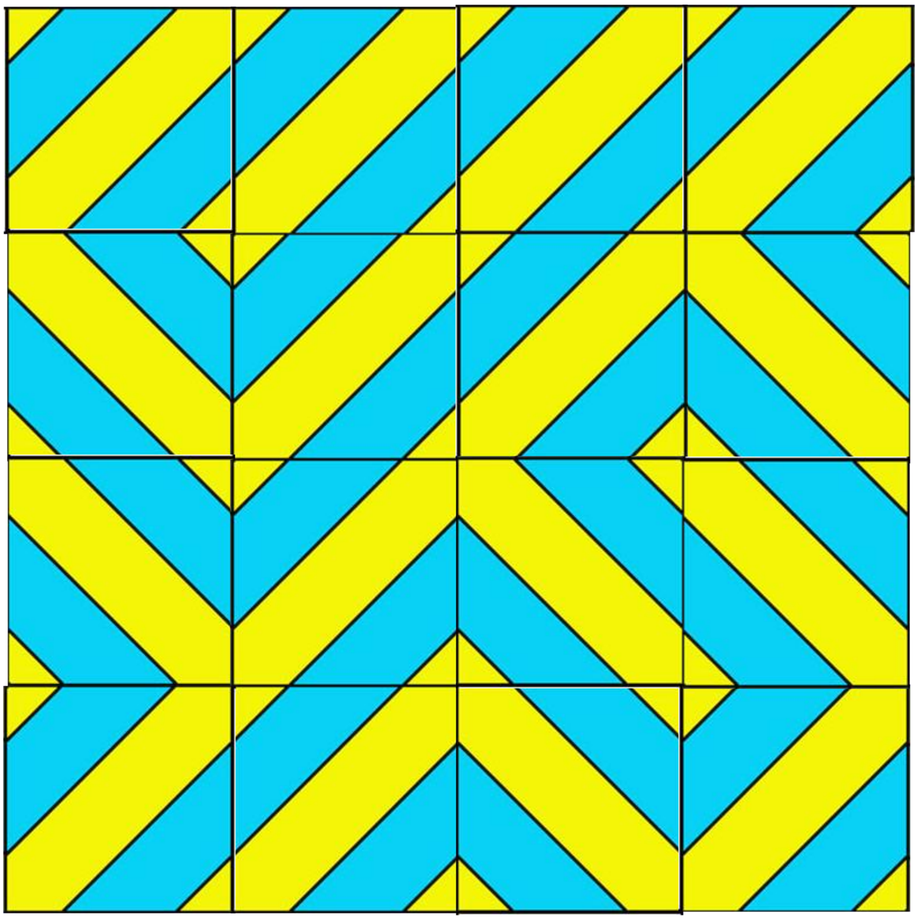
D'où le pavage obtenu par translations successives :

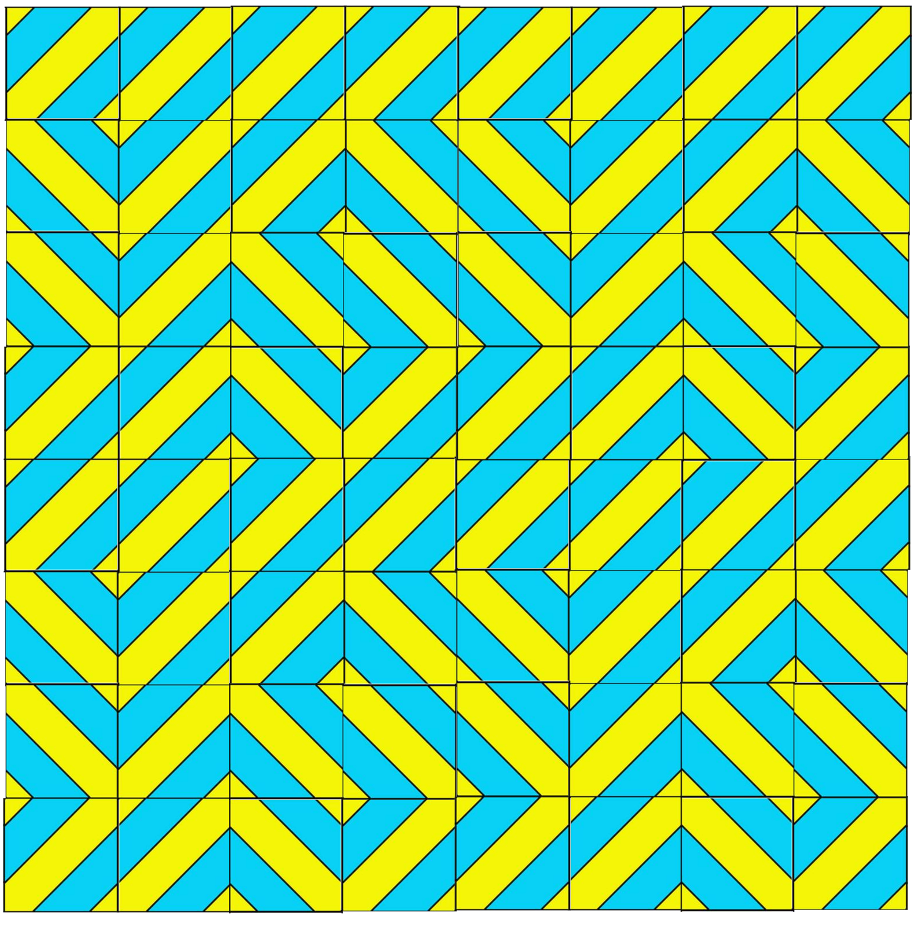


Pour les exemples 2 et 3, on procèdera de la même manière, selon une technique désormais bien connue :









V. QUE FAIRE AVEC NOS ELEVES ?

Il est désormais temps de se poser la question de l'utilisation possible des pavages de Truchet dans une classe.
Dans le cadre du programme de Mathématiques, principalement de géométrie, différents points peuvent être mis en évidence :

- Perception et maîtrise de l'espace plan par l'agencement de formes planes.
- Respect de règles d'agencement pour réaliser un pavage (utilisation d'un algorithme).
- Reconnaissance de formes géométriques simples dans une figure plus complexe.
- Tracés géométriques avec l'utilisation des instruments usuels.
- Reproduction de figures géométriques sur des supports divers (papier quadrillé, papier pointé, papier blanc).
- Description d'une figure géométrique et écriture d'un programme de construction.
- Perception et mise en œuvre de relations géométriques : alignements, angles droits, symétries,…
- Utilisation des pièces de pavage pour exploiter la notion de fraction et la notion d'aire.

Un avantage appréciable des pavages de Truchet (comme les puzzles géométriques en général, le Tangram étant un exemple célèbre) est de permettre de nombreuses manipulations fort utiles pour multiplier les essais et pour favoriser la prise de conscience des propriétés géométriques.
Il importe donc de mettre à disposition des élèves de <u>nombreuses pièces bicolores</u>. C'est un travail de préparation important (les réaliser sur des feuilles cartonnées, si possible plastifiées) mais les outils actuels en accélèrent la mise en œuvre (imprimantes couleur, photocopies,…).
Il serait aussi utile de mettre à disposition des élèves des <u>couples de carrés selon les 10 modèles possibles</u> (voir page 4) ainsi que des <u>carrés de 4 cases</u> obtenus par différents agencements possibles de ces couples (voir page 18 pour les pavages de Truchet linéaires). Il sera ainsi plus facile pour les élèves d'obtenir des résultats esthétiques.

Récapitulons ce qu'il est possible de faire selon les cycles :

<u>Cycle 2</u> :

- Manipulation libre des pièces (carrés simples, couples de carrés, carrés à 4 cases) ;
- Manipulation des pièces (carrés simples, couples de carrés, carrés à 4 cases) pour obtenir une figure imposée présentée soit au même format, soit en plus petit en commençant par les pavages simples, puis en introduisant les pavages linéaires ;
- Agencement des pièces pour respecter un algorithme (translations successives voire rotations) ;
- Tracés sur papier quadrillé ou pointé pour reproduire un motif (réalisation de frises géométriques), avec l'utilisation des instruments usuels ;
- Analyse des figures obtenues pour en faire ressortir des propriétés géométriques (alignements, angles droits, parallélisme) ou des figures élémentaires (carrés, rectangles).

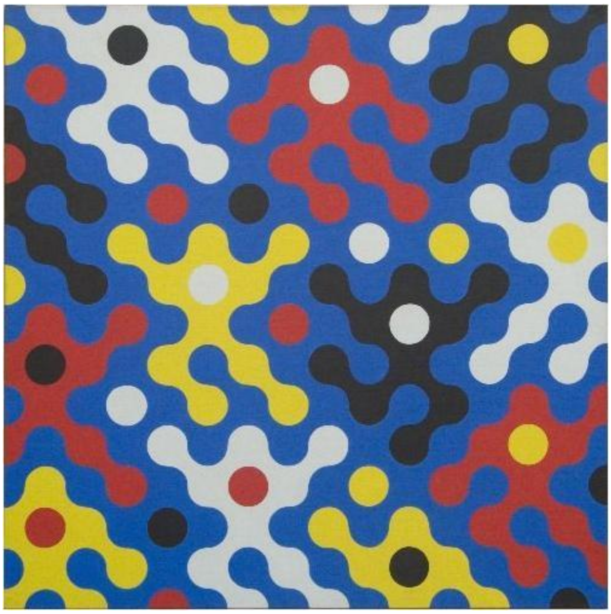
Cycle 3 :

- Manipulation des pièces (carrés simples, couples de carrés, carrés à 4 cases) pour obtenir une figure imposée présentée en plus petit (modèle de reproduction) ;
- Agencement des pièces pour respecter un algorithme (translations successives, rotations et symétries) en utilisant les pavages linéaires puis les pavages étendus;
- Tracés sur papier quadrillé ou pointé, puis sur papier blanc pour reproduire un motif (réalisation de frises géométriques) avec l'utilisation des instruments usuels ;
- Analyse des figures obtenues pour en faire ressortir des propriétés géométriques (alignements, angles droits, parallélisme, symétrie) ou des figures élémentaires (carrés, rectangles).
- Ecriture d'un programme de construction d'une pièce géométrique (couple de deux carrés ou carré à 4 cases) ;
- Utilisation des pavages obtenus pour faire ressortir la notion de fraction (quelle fraction du pavage représente la partie bleue ?) ou la notion d'aire (l'unité étant la moitié d'un carré de base, quelle est l'aire de la partie bleue ? quelle est l'aire si l'unité est un carré de base ?)

VI. Les pavages de Truchet et les Arts Visuels.

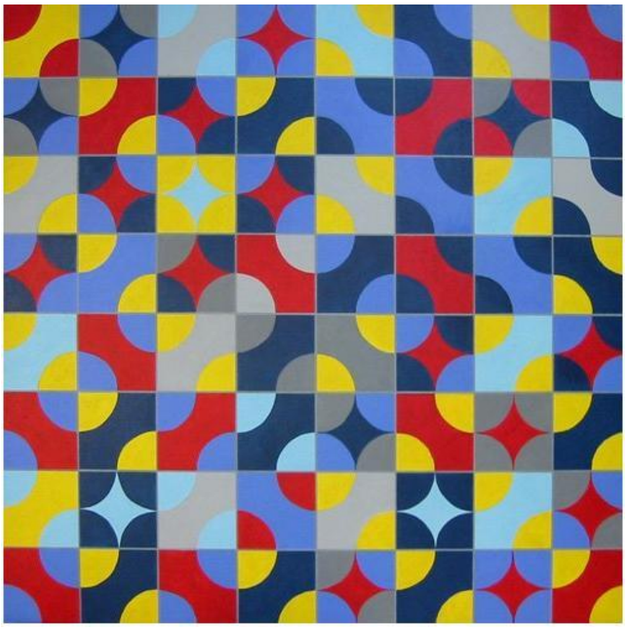
Indubitablement, il apparaît que les pavages de Truchet, par leur aspect esthétique, peuvent permettre de faire un lien entre les activités géométriques et les Arts Visuels.
Un artiste contemporain, **Jean-Claude Ferry**, en a fait un sujet d'inspiration :

Identité 3



Couleurs

La Terre et le Ciel



Mose

On peut consulter son site à l'adresse :
http://web.me.com/jcferry/peinture/talon_architecte/talon_architecte.html

VII. Bibliographie et sitographie.

1. Revue Tangente n°99 Juillet-Août 2004

2. Maths et Arts APMEP de Lorraine

3. Le pavage de Truchet : http://hypo.ge.ch/www/math/html/node17.html

4. Pavage de Truchet (présentation animée sous forme de jeu) :
   http://www.lacitec.on.ca/~dmorin/applets/truchet/index.html

5. Pavages SPLT dits de Truchet :
   http://jeux-et-mathematiques.davalan.org/divers/truchet/index-en.html

6. Redstart studio (en anglais). Sous forme animée, une grande variété de pavages de Truchet simples :
   http://redstartstudio.com/?tag=dominique-douat

7. Pavages de Truchet et autres SPLT :
   http://rocbo.net/geom_peintres/typo/truchet/pavages/index.htm

8. Trois inventions du Père Truchet :
   http://jacques-andre.fr/faqtypo/truchet/truchet.html

9. Le Talon de l'architecte :
   http://web.me.com/jcferry/peinture/talon_architecte/talon_architecte.html